

Tema 3.- Límites de funciones. Ejercicios

Límites en infinito.

Halla el límite de las siguientes funciones cuando $x \rightarrow +\infty$ y también cuando $x \rightarrow -\infty$.

1. Primero unos polinomios sencillitos

$$\begin{array}{llll} \text{a) } x; & \text{b) } 3x - 2; & \text{c) } x^2; & \text{d) } -2x^2 + 3; \\ \text{e) } x^2 - 5; & \text{f) } 5x^3 - x; & \text{g) } x^3 - x^2; & \text{h) } -5x^4 + 3x^2. \end{array}$$

2. Sigamos con unas fracciones algebraicas

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \frac{1}{x^2}; & \text{b) } \frac{1}{x^2 + 3x}; & \text{c) } \frac{x + 1}{x}; \\ \text{d) } \frac{2x - 1}{x + 1}; & \text{e) } \frac{2x^2 - 4}{-x^2 + 1}; & \text{f) } \frac{x^2 - 5x - 3}{-2x^2 + x - 2}; \\ \text{g) } \frac{x^4 - 5x - 3}{x^2 - 2x + 5}; & \text{h) } \frac{x + 3}{-5x^3 + 2x}; & \text{i) } \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x^2}}. \end{array}$$

3. Introduzcamos algunas raíces. ten cuidado con su campo de definición.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \sqrt{x + 1} + \sqrt{x}; & \text{b) } \sqrt{x^3 - x^2 - 1}; & \text{c) } \frac{\sqrt{x}}{x}; \\ \text{d) } \frac{\sqrt{x - 5}}{\sqrt{x + 4}}; & \text{e) } \sqrt{3 - 2x}; & \text{f) } \sqrt{100 - x^2}. \end{array}$$

4. Diferencia de funciones que tienden a infinito

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \frac{x^2 - 3}{x + 4} - x; & \text{b) } x^2 - \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}; & \text{c) } \frac{x^3}{x^2 + 1} - \frac{3x^2}{x - 3}; \\ \text{d) } \sqrt{x + 1} - \sqrt{x}; & \text{e) } \sqrt{2x} - \sqrt{x}; & \text{f) } \sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - 1}; \\ \text{g) } \frac{\sqrt{x + \sqrt{2x}}}{\sqrt{x - \sqrt{2x}}}; & \text{h) } \frac{\sqrt{x^2 + \sqrt{2x}}}{\sqrt{x^2 - \sqrt{2x}}}. \end{array}$$

5. Veamos exponenciales. Ten cuidado con los campos de definición (sólo la hemos definido con base positiva)

$$\begin{array}{llll} \text{a) } \frac{5^x}{4^x}; & \text{b) } \frac{3^x}{2^x}; & \text{c) } \frac{2^x}{3^x}; & \text{d) } \frac{5^x}{5^{x+3}}; \\ \text{e) } (3-x)^{x-2}; & \text{f) } (3-x)^{2-x}; & \text{g) } \left(\frac{2x+1}{x}\right)^{-5}; & \text{h) } \left(\frac{2x+3}{2x}\right)^{100}. \end{array}$$

6. Ahora las que contienen el número e :

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x-4}; & \text{b) } \left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{3x+5}; & \text{c) } \left(\frac{x-2}{x+3}\right)^{3x+5}. \\ \text{d) } \left(\frac{2x+1}{x}\right)^x; & \text{e) } \left(\frac{x}{2x+1}\right)^x; & \text{f) } \left(\frac{x}{2x+1}\right)^{-x}. \end{array}$$

Límites en $p \in \mathbb{R}$.

Halla el límite de las siguientes funciones en el punto indicado.

7. Primero unos directos

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 5} (x^2 - 4x + 5); & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 7} \sqrt{x-3}; & \text{c) } \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x^2-3} \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{x^2+2x+1}; & \text{e) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x(x-3)}{x^2-4x}; & \text{f) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-7x+2}{3x^2-2x+4}. \end{array}$$

8. Sigamos con unas fracciones algebraicas cuyo denominador se anula

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2+2}{x-4}; & \text{b) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^2-2x+1}{x^2-25}; & \text{c) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x-3}{x^2+9} \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-4}; & \text{e) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2}; & \text{f) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1}; \\ \text{g) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-3x}{2x-6}; & \text{h) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-1}{x+1}; & \text{i) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{2x^2-6x+4}; \\ \text{j) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-7x+12}{2x^2-6x-8}; & \text{k) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^2-4x+3}; & \text{l) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-5x+4}{x^3-7x^2+12x}. \end{array}$$

9. También algunas raíces

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{\frac{x-3}{x^2-5x+6}}; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{\frac{x^2-7x+10}{x-5}}; \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{\frac{x-5}{x^2-9x+20}}.$$

10. Diferencia de funciones que tienden a infinito

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{3}{x^2-5x+6} - \frac{4}{x^2-2} \right); \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{5}{x-3} - \frac{4}{x^2-8x+15} \right);$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{4}{x^2-5x+4} - \frac{7}{x-1} \right); \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{6}{x-2} - \frac{3}{x} \right);$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{3x+1}{x^2} - \frac{4}{x^2-8x+12} \right); \quad \text{f) } \lim_{x \rightarrow 2} (1 - \sqrt{3-x});$$

$$\text{g) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{1-\sqrt{2-x}}; \quad \text{h) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-3x}{2-\sqrt{2x-2}};$$

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1-\sqrt{x-4}}{x^2-7x+10}.$$

11. Veamos exponenciales relacionadas con el número e .

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} (x+1)^{x+2}; \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} (x+1)^{1/x}; \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} (x+1)^{\frac{2}{x}};$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x+3}{x-1} \right)^{1-x}; \quad \text{e) } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3x+4}{2x+5} \right)^{\frac{3}{x-1}};$$