Tema 4.- Derivada

4.1.- Definición.

La derivada de la función $y = f(x)$ en el punto p se denota $f'(p)$ y se define como el límite (si existe)

$$f'(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}.$$

Por tanto, en los puntos que está definida, la derivada es una función $f'(x)$.

4.2.- Cálculo.

Para el cálculo necesitamos conocer las derivadas de las funciones básicas.

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	nx^{n-1}
$\operatorname{sen} x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$
$\operatorname{tg} x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$
$\operatorname{arc\,sen} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{arc\,tg} x$	$\dfrac{x}{1-x^2}$
e^x	e^x
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$

Además necesitamos conocer distintas reglas.

4.3.- Propiedades elementales.

Veamos como se comporta respecto a varias operaciones.

1.- Con la suma.

La derivada de la suma de funciones derivables es la suma de las derivadas

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$

2.- Con el producto

La derivada del producto de funciones derivables es la suma de los productos de cada una por la derivada de la otra

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

3.- El cociente $1/f(x)$

La derivada del cociente por una función derivable es la derivada partida por la función al cuadrado.

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}.$$

4.- La regla de la cadena.

Dadas dos funciones reales de variable real, $f(x)$ y $g(x)$, su composición $g \circ f$ es la función definida por

$$g \circ f(x) = g(f(x)).$$

Ejemplo. Si $f(x) = x^2$ y $g(x) = 5x+3$, define $g \circ f(x)$ y $f \circ g(x)$. Veras que las composiciones no son iguales.

Otro ejemplo. La función $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x}$, es una composición de una lineal y una raíz.

La derivada de la función compuesta es el producto de las derivadas (en los puntos adecuados, ¡claro!)

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Ejemplo. Hallar, usando la regla de la cadena, la derivada de $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$.

4.4.- Dibujo de curvas.

Veamos propiedades geométricas de la gráfica de la función

$$y = f(x)$$

que se pueden descubrir mediante un análisis de la derivada. Todas están basadas en el hecho de que $f'(x)$ es la pendiente de la recta tangente a la gráfica en el punto x.

• **Crecimiento y decrecimiento.**

Si $f'(x) > 0$, la función es (estrictamente) creciente en los alrededores de x.
Igualmente, si $f'(x) < 0$, la función es (estrictamente) decreciente en los alrededores de x.

• **Extremos relativos.**

¿Que pasa cuando $f'(x) = 0$?. Depende de que la derivada cambie de signo (cambia el carácter de creciente o decreciente) con lo que tendremos un máximo o un mínimo relativo o no cambie de signo con lo que tenemos un punto de inflexión.
Si la función tiene en x un extremo relativo, $f'(x) = 0$.
No siempre que $f'(x) = 0$ hay uno (considera $y = x^3$ en 0).

• **Concavidad y convexidad.**

Una función es cóncava respecto al eje OX cuando la gráfica está por arriba de la tangente y convexa en caso contrario.
Si $f''(x) > 0$, la función es cóncava.
Si $f''(x) < 0$, la función es convexa.

• **Máximos y mínimos.**

En un mínimo relativo la curva es cóncava y en un máximo relativo la curva es convexa. Por tanto,
Si $f'(x) = 0$ y $f''(x) > 0$, tenemos un mínimo en x.
Si $f'(x) = 0$ y $f''(x) < 0$, tenemos un máximo en x.

• **Puntos de inflexión.**

Un punto de inflexión es un valor de x donde la curva cambia de cóncava a convexa (o al revés).
Si $f(x)$ tiene un punto de inflexión en x, $f''(x) = 0$.

Además de los elementos antes citados, hay algunos más para los que sólo hacen falta límites. Son las ramas infinitas, que indican como se comporta la función en la lejanía y cerca de los puntos en los que no está definida.

4.5.- Regla de L´Hôpital.

Nos ayuda a calcular el limite del cociente de dos funciones cuando se produce una indeterminación del tipo $0/0$ (también es aplicable a las ∞/∞).

Sólo se puede usar si las funciones son continuas y derivables cerca del punto al que tomamos el límite.

En ese caso, si el límite del cociente de las derivadas existe, también el del cociente de las funciones y son iguales.

$$\lim_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to p} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$