

Tema 4.- Derivadas. Ejercicios

Derivadas.

Halla las derivadas de las funciones siguientes.

1. Primero unos polinomios sencillitos

a) $\frac{1}{x^2}$;

b) $\frac{1}{x^3}$;

c) $\frac{1}{\sqrt{x}}$;

d) $\sqrt[3]{x^2}$;

e) $x\sqrt[8]{x^2}$;

f) $6x^7 - 2x^5 + 4x^2 + 3x - 2$;

g) $x^{-5} + 3x^{-3} + 6$;

h) $3x^3 + 2x^2 + 5x^5 + 1$;

i) $4x^{11} - 2\sqrt{x} + \frac{7}{x}$;

j) $\sqrt{5x^2} - \pi x + \sqrt{2}$;

k) $4\sqrt{x} - 3\frac{3}{x} + x^4$.

2. Ahora unas fracciones

a) $\frac{1}{x-1}$; b) $\frac{3}{x^2-1}$; c) $\frac{-x}{x+1}$.

3. Ahora con algunas raíces

a) $\sqrt{2x-3}$; b) $\sqrt{(2x-3)^7}$; c) $(2\sqrt{x}-3)^7$; d) $\sqrt[3]{5x^2}$;

e) $\sqrt{x}-1$; f) $\sqrt[3]{(5x-3)^2}$; g) $(x-\sqrt{1-2x})^3$.

4. Usemos funciones trigonométricas

a) $\operatorname{sen} 2x$;

b) $\operatorname{sen}^2 x$;

c) $\operatorname{sen}^2 x^2$;

d) $\operatorname{sen} x^2$;

e) $\operatorname{sen} x \cos 2x$;

f) $7 \operatorname{sen} x + 5 \cos x$;

g) $\cos(5x^2 - 3x + 2)$;

h) $\cos^5(7x^2)$;

i) $6 \cos^2(3x + 5)$;

j) $5 \operatorname{sen} x - \sqrt{5}\sqrt{x}$;

k) $\operatorname{tg}^2 x$;

l) $\sqrt{\operatorname{tg} x^2}$;

m) $\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x)$;

n) $\operatorname{sen}^2(\cos^7 x)$;

o) $\sqrt{\cos^5 x^2}$;

p) $\operatorname{sen} \sqrt{1-3x}$;

q) $\sqrt{\operatorname{sen}^2 x + (x^2 - 1)^5}$;

r) $\cos^2 \sqrt[3]{x + (3-x)^2}$.

5. Ahora exponenciales y logarítmicas

- a) $\ln(2x + 1)$; b) $\ln(x^2 - 1)$; c) $x \ln x$;
d) $\frac{\ln x}{x}$; e) e^{4x} ; f) $x^3 e^x$;
g) $e^{x \operatorname{tg} x}$; h) x^x ; i) x^{3x} ;
j) x^{x+1} ; k) $e^{(x^x)}$; l) $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

6. Hallar las derivadas sucesivas de

- a) $6x^4 - x^3 + 5x^2 - 11x$; b) $5 \cos 2x$.

Dibujo de curvas.

7. Estudiar las curvas dadas por polinomios:

- a) $(x + 1)(x - 2)(x - 4)$; b) $\frac{x^4}{4} - 2x^2$; c) $x^4 - 4x^3$.

8. Estudiar las curvas dadas por fracciones algebraicas:

- a) $\frac{x^2}{x^2 - 9}$ b) $\frac{x - 1}{x + 1}$; c) $\frac{x}{x^2 - 1}$;
d) $\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$; e) $\frac{6x}{x^2 + 1}$; f) $\frac{x^2 + 9}{x^2 - 4}$;
f) $\frac{x^2 - x + 6}{x^2 - x}$; g) $\frac{8 - 3x}{x(x - 2)}$.

9. Estudiar algunas curvas algo más raras

- a) $\sqrt[3]{(x + 3)^2}$; b) $x - \operatorname{sen} x$; c) $\operatorname{sen}(\pi x^2)$;
d) $\ln \operatorname{sen} x$; e) $\operatorname{arc} \operatorname{sen} \sqrt{x + 1}$; f) $\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2}{x - 1}$;
g) $\operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{6x^3}$; h) $\frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{\sqrt{x + 1}}$; i) $e^{\operatorname{arc} \operatorname{sen} x}$;
j) $\ln \operatorname{arc} \operatorname{cos}(x - 1)$.

Máximos y mínimos.

Planteemos problemas de máximos y mínimos.

10. Descompón 16 en suma de dos números con producto máximo.
11. Halla un número que sumado con 25 veces su inverso de un máximo.
12. Hallar los lados de un rectángulo de área máxima entre los de perímetro 20.
13. Hallar los lados de un triángulo rectángulo de área máxima entre los de hipotenusa 10.
14. Hallar los lados de un rectángulo de diagonal menor entre los de perímetro 20.
15. Dado un triángulo isósceles con una base de 12 y una altura de 5, indica los puntos de la altura en los que al suma de distancias a los tres vértices es máxima y mínima.

Cálculo de límites por L'Hôpital.

16. Halla los siguientes límites

- | | | |
|--|--|--|
| a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 + 2x - 16}{x^2 - x - 2};$ | b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x};$ | c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x};$ |
| d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x \operatorname{sen} x};$ | e) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x} \right);$ | f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{1 - \cos x};$ |
| g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x - x}{x^3};$ | h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x} \right);$ | i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x};$ |
| j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x};$ | k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2};$ | l) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - e^x)^{e^x};$ |
| m) $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{1}{x}};$ | l) $\frac{\ln \left(\frac{1+x}{x} \right)}{\frac{1}{x}}.$ | |