

## Tema 5.- Integración

### 5.1.- Definición de primitiva.

Decimos que una función  $F(x)$  es una primitiva de la función  $f(x)$  si se cumple

$$F'(x) = f(x).$$

Esto se denota

$$F(x) = \int f(x) dx.$$

Si  $F(x)$  es primitiva de  $f(x)$ , también lo es  $F(x) + K$  para todo  $K \in \mathbb{R}$ . Por tanto escribimos

$$\int f(x) dx = F(x) + K.$$

### 5.2.- Cálculo.

Para el cálculo necesitamos conocer las primitivas de las funciones básicas.

<u><math>f(x)</math></u>	<u><math>\int f(x) dx</math></u>
$nx^{n-1}$	$x^n + K$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + K$
$\text{sen } x$	$-\cos x + K$
$\cos x$	$\text{sen } x + K$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\text{arc sen } x + K$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\text{arc cos } x + K$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\text{arc tg } x + K$
$e^x$	$e^x + K$

### 5.3.- Propiedades elementales.

Veamos como se comporta respecto a varias operaciones.

#### 1.- Con la suma.

La primitiva de la suma de funciones es la suma de las primitivas

$$\int (f + g)(x) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$$

#### 2.- Con el producto por una constante.

La primitiva del producto de una función por una constante es el producto de la primitiva de la función por esa constante

$$\int l \cdot f(x) dx = l \cdot \int f(x) dx.$$

#### 3.- Integración por partes.

Sean  $f(x)$  y  $g(x)$  funciones derivables. Conocemos la fórmula

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Hallando primitivas

$$\int (f \cdot g)'(x) dx = \int (f \cdot g)'(x) dx = \int f'(x) \cdot g(x) dx + \int f(x) \cdot g'(x) dx.$$

Despejando obtenemos la fórmula de la integración por partes

$$\int f'(x) \cdot g(x) dx = (f \cdot g)(x) - \int f(x) \cdot g'(x) dx.$$

#### 4.- Integración por sustitución.

Como antes, integrando la regla de la cadena

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

obtenemos

$$\int g'(f(x)) \cdot f'(x) dx = g(f(x)) + C.$$

#### 5.4.- Integral definida.

La integral definida tiene una definición teórica que podéis consultar en cualquier libro de Bachillerato. Para su cálculo usaremos la ‘regla de Barrow’: Si  $F(x)$  es una primitiva de  $f(x)$ , se cumple

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

**Area bajo una curva.**- Si una curva está definida por una función positiva  $f(x)$ , el área encerrada entre la curva, y el eje OX entre dos valores de  $x$ ,  $a$  y  $b$ , es

$$A = \int_a^b f(x) dx.$$

**Area entre dos curvas.**- Dadas dos curvas definida por funciones  $f(x) \leq g(x)$ , el área encerrada entre las curvas, entre dos valores de  $x$ ,  $a$  y  $b$ , es

$$A = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx.$$