Tema 6.- Sistemas de ecuaciones lineales.

6.1.- Resolución por el método de Gauss.

Sistemas de ecuaciones equivalentes.

Son los que tienen las mismas soluciones

Hay dos operaciones básicas que transforman un sistema de ecuaciones lineales en otro equivalente

1.- Intercambiar dos ecuaciones. Así

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 2 \\ 3x & - & 2y & - & z & = & 4 \\ -2x & + & y & + & 2z & = & 2 \end{array}\right. \;;\quad \text{y} \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -2x & + & y & + & 2z & = & 2 \\ x & + & y & + & z & = & 2 \\ 3x & - & 2y & - & z & = & 4 \end{array}\right.$$

son equivalentes.

2.- Substituir una ecuación por una combinación lineal de ecuaciones en las que ella participa con coeficiente $\neq 0$. Así

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 2 \\ 3x & - & 2y & - & z & = & 4 \\ -2x & + & y & + & 2z & = & 2 \end{array}\right. \;;\quad \text{y} \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 2 \\ 3x & - & 2y & - & z & = & 4 \\ & & 3y & + & 4z & = & 6 \end{array}\right.$$

son equivalentes.

Este se puede hacer en dos pasos:

2.1 Substituir una ecuación por ella misma multiplicada por un coeficiente $\neq 0$.

2.2 Añadir a una ecuación una combinación lineal de las otras.

Reducción a forma escalonada.

Empezando con una ecuación donde la primera variable tenga coeficiente $\neq 0$ (1 si es posible) y usándola como pivote, cambiamos todas las demás por otras donde el coeficiente de la primera variable es 0. Así, en el sistema del principio

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 2 \\ 3x & - & 2y & - & z & = & 4 \\ & & 3y & + & 4z & = & 6 \end{array}\right. \;;\quad \text{y} \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 2 \\ & - & 5y & - & 4z & = & -2 \\ & & 3y & + & 4z & = & 6 \end{array}\right.$$

son equivalentes.

Repitiendo el procedimiento, llegamos a un sistema equivalente que tiene forma escalonada.

En algún caso intermedio puede ser rentable reordenar las variables. Por ejemplo, en nuestro sistema, reordenando

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 2 \\ & - & 5y & - & 4z & = & -2 \\ & & 3y & + & 4z & = & 6 \end{array}\right. \;;\quad \text{y} \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & z & + & y & = & 2 \\ & - & 4z & - & 5y & = & -2 \\ & & 4z & + & 3y & = & 6 \end{array}\right.$$

son equivalentes.

Siguiendo el proceso

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & z & + & y & = & 2 \\ & - & 4z & - & 5y & = & -2 \\ & & 4z & + & 3y & = & 6 \end{array}\right. \; ; \quad \text{y} \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & z & + & y & = & 2 \\ & - & 4z & - & 5y & = & -2 \\ & & & - & 2y & = & 4 \end{array}\right.$$

son equivalentes.

Si todos los coeficientes de la diagonal son $\neq 0$, se puede resolver. Si a partir de alguno son 0, hay que tener cuidado. Por ejemplo, nuestro sistema da

$$x = 1; \; y = -2; \; z = 4.$$

<u>Reducción a forma diagonal usando las filas</u>

Si todos los términos diagonales son $\neq 0$, se pueden usar, empezando por abajo, para eliminar todas las variables en cada ecuación excepto una.

Al hacerlo hemos resuelto el sistema. Así, el sistema anterior da

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & z & + & y & = & 2 \\ & - & 4z & - & 5y & = & -2 \\ & & & - & 2y & = & 4 \end{array}\right. \; ; \quad \text{y} \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & z & & & = & 4 \\ & - & 4z & & & = & -12 \\ & & & - & 2y & = & 3 \end{array}\right.$$

son equivalentes y

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & z & & & = & 4 \\ & - & 4z & & & = & -12 \\ & & & - & 2y & = & 4 \end{array}\right. \; ; \quad \text{y} \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & & & & & = & 1 \\ & - & 4z & & & = & -12 \\ & & & - & 2y & = & 4 \end{array}\right.$$

son equivalentes.

Reduciendo los coeficientes a 1 salen los mismos resultados.

$$\left\{\begin{array}{rrrcr} x & & & = & 1 \\ & z & & = & 3 \\ & & y & = & 2 \end{array}\right.$$

6.2.- Matrices.

Matriz y definiciones asociadas.

Una matriz no es más que una forma de ordenar los números en una tabla. Se representa

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Los números a_{ij} son *las entradas* de la matriz. La entrada a_{ij} está en la fila i y la columna j. La matriz M se dice que es una matriz $m \times n$ (tiene m filas y n columnas).

La matriz M también se escribe

$$M = (a_{ij})$$

haciendo constar la m y la n si es necesario.

Operaciones con matrices.

1.- La suma. Es entre matrices de la misma dimensión. Si $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ se define su suma

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}).$$

2.- Producto por un número. Si $A = (a_{ij})$ y $K \in \mathbb{R}$ se define su producto

$$KA = (Ka_{ij}).$$

3.- Producto de matrices. Si $A = (a_{ij})$ es una matriz $m \times n$ y $B = (b_{jk})$ es una matriz $n \times p$, su producto es la $m \times p$ definida

$$A \cdot B = (\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}).$$

Es conveniente ver algunos ejemplos y ver que propiedades cumplen y cuales no estas operaciones (el producto no es conmutativo).

Matriz de un sistema lineal.

El producto de matrices está definido de manera que un sistema se pueda expresar como

$$M \cdot X = C$$

donde M es la matriz de los coeficientes del sistema, X es una matriz columna formada por las incógnitas y C es la matriz columna de los segundos términos de las ecuaciones.

Veamos un ejemplo.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 2 \\ 3x & - & 2y & - & z & = & 4 \\ & & 3y & + & 4z & = & 6 \end{array}\right. ; \quad \text{es} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

<u>Resolución de un sistema en forma matricial.</u>

Consideremos un sistema dado en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ c_m \end{pmatrix}.$$

Realizar las operaciones en las ecuaciones para diagonalizarla equivale realizarlas en la la matriz A. Como las mismas operaciones se han de realizar en la matriz C, lo más fácil es considerarlas juntas

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & c_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & c_m \end{pmatrix}$$

y realizar operaciones hasta que las primeras n columnas dan la matriz diagonal.

<u>Cálculo de la matriz inversa usando Gauss.</u>

Una matriz cuadrada A puede tener inversa que denotamos por A^{-1}. Cumple

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I.$$

Es fácil ver que la inversa, si existe es única.

El método de Gauss nos sirve para hallar la inversa, ya que dado el sistema

$$A \cdot X = C$$

podemos operar con la matriz A (en vez de con el sistema) y reducirla a forma diagonal. Como cada operación es traducible al producto con una matriz elemental, lo que hemos hecho es hallar una matriz que cumpla

$$B \cdot A = I.$$

Para saber cual es la matriz B, sólo tenemos que someter a la matriz I a los mismas operaciones que sometemos a A.

5.3.- Determinante.

Determinante de una matriz cuadrada.

Se denomina $|A|$ o $\det(A)$. Nos basta ver la expresión de los de orden 2 y 3. Son

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

y

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

La propiedad más importante es que una matriz cuadrada es invertible si y sólo si su determinante es $\neq 0$.

Rango y teorema de Rouché-Frobenius.

El rango de una matriz es la mayor entre las dimensiones de las submatrices cuadradas de A que sean invertibles.

El sistema es compatible si y sólo si el rango de la matriz de coeficientes coincide con el de la matriz ampliada.

Además, es determinado si ambos coinciden con el número de variables.

Matriz inversa y determinantes.

Hay un procedimiento de construcción de la inversa de una matriz usando determinantes que podéis encontrar en cualquier libro de 2º. No lo incluyo aquí por falta de tiempo para darlo.

Regla de Cramer.

Sirve para resolver sistemas

$$M \cdot X = C$$

con matriz de coeficientes invertible.

Para ello necesitamos matrices auxiliares M_i que resultan de substituir en M la columna i por la matriz C. Así

$$M_1 = \begin{pmatrix} c_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ c_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_m & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

etc.

Entonces la solución tiene el valor numérico

$$x_i = \frac{|M_i|}{|M|}$$

para $i = 1, 2, \ldots, n$.