Solucions a alguns exercicis del tema 3

Exercici 4 .- Difereència de funcions que tendeixen a infinit

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{2x} - \sqrt{x} = +\infty$$

El límit quan $x \to -\infty$ no té sentit.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+\sqrt{2x}}}{\sqrt{x^2-\sqrt{2x}}} = 1$$

El límit quan $x \to -\infty$ no té sentit.

Exercici 6 Alguns límits que hi contenen el nombre "e".

$$\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x-4} = e^3$$

$$\lim_{x\to-\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x-4} = e^3$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{3x+5} = e^{15}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{3x+5} = e^{15}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x-2}{x+3}\right)^{3x+5} = e^{-15}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x-2}{x+3}\right)^{3x+5} = e^{-15}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{2x+1}\right)^{-x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \left(\frac{x}{2x+1}\right)^{-x} = 0$$

Exercici 10 Difereència de funcions que tendeixen a infinit

$$\lim_{x\to1} \frac{x-1}{1-\sqrt{2-x}} = 2$$

$$\lim_{x\to5} \frac{1-\sqrt{x-4}}{x^2-7x+10} = \frac{1}{2}$$

Exercici 11 Exponencials relacionades (algunes) amb el nombre e.

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

Per reslodre'l hem de mirar els límits per la dreta i per l'esquerra.

$$\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to +\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e$$

On hem fet el canvi $x = \frac{1}{t}$

$$\lim_{x\to 0^-}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to -\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e$$

Anàlogament tenim:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{2}{x}} = e^2$$

Per resoldre'l, agafeu també límits per la dreta i per l'esquerra.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{3x+4}{2x+5}\right)^{\frac{1}{x-1}}$$

Fem el canvi $t = x-1$ perquè hi aparega $t \to 0$

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{3t+7}{2t+7}\right)^{\frac{1}{t}}$$

Ara agafem els límits per la dreta i per l'esquerra:

$$\lim_{t\to 0^+}\left(\frac{3t+7}{2t+7}\right)^{\frac{1}{t}}$$

(Fent el canvi $u = \frac{1}{t}$) =

$$\lim_{u\to +\infty}\left(\frac{\frac{3}{u}+7}{\frac{2}{u}+7}\right)^u = \lim_{u\to +\infty}\left(1+\frac{1}{2+7u}\right)^u = \lim_{u\to +\infty}\left(1+\frac{1}{2+7u}\right)^{(2+7u)\frac{u}{2+7u}} = e^{1/7}$$

Anàlogament hom calcula el límit quan $t \to 0^-$ i es veu que dóna el mateix resultat