

Indefinido, indeterminado, imposible, inexistente, sin sentido: un estudio en los libros de texto de Secundaria sobre $0/0$ y $a/0$ *

Bernardo Gómez Alfonso (Universidad de Valencia),
María Ángeles Lonjedo Vicent y Asunción Oliver Borrás
(Estudiantes de Doctorado y Profesoras de I.E.S.)

Nivel educativo: **Bachillerato**

En las matemáticas de Secundaria aparecen las expresiones $a/0$ ($a \neq 0$) y $0/0$ en distintas situaciones. En los libros de texto, las explicaciones sobre el significado de estas expresiones se hacen en términos de inexistencia, indefinición, imposibilidad y sin sentido. ¿Pero, cuál es su significado preciso? En esta comunicación nos planteamos contestar a esta pregunta y presentar los resultados de una indagación hecha acerca de las concepciones de una muestra de estudiantes de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Valencia, acerca de las mismas, en el contexto de esas expresiones.

Problemática

En las matemáticas de Secundaria aparecen las expresiones $a/0$ ($a \neq 0$) y $0/0$ en distintas situaciones. Así, por ejemplo, $a/0$ están en los libros de texto en las siguientes situaciones:

1. Al estudiar las rectas y planos en el espacio.

Poner en forma continua la recta r que pasa por el punto $(3, -1, 4)$ y es paralela al vector $(2, -5, 0)$

$$r: \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z-4}{0} \quad (\text{Anaya, 2001, p. 159})$$

Estudiar la posición relativa de la recta

$$\frac{x-5}{7} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+3}{0} \text{ y el plano } 2x - y + z + 2 = 0 \quad (\text{Anaya, 2001, p. 167})$$

2. Al estudiar las razones trigonométricas de los ángulos “frontera” entre cuadrantes:

Las razones de estos ángulos “frontera” entre cuadrantes se recogen en la siguiente tabla:

* Comunicación presentada en las XI Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas (JAEM). Canarias, Julio de 2003. ISBN. 84-689-0720-0.

Ángulo	sen	cos	tg	cotg	sec	cosec
0 rad = 0°	0	1	0		1	
$\pi/2$ rad = 90°	1	0		0		1
π rad = 180°	0	-1	0		-1	
$3\pi/2$ rad = 270°	-1	0		0		-1

Las casillas sombreadas indican que la razón trigonométrica correspondiente no existe. La inexistencia de dicha razón se debe a que la división entre cero no está definida. Por ejemplo, $\operatorname{tg} 90^\circ = \operatorname{sen} 90^\circ / \operatorname{cos} 90^\circ = 1/0$, y esta división no existe. Más adelante se verá y dirá que “tiende a infinito” (Santillana, Bachillerato 1º. 1996. p. 127)

3. Al estudiar las funciones racionales

Las funciones racionales son cocientes de funciones polinómicas. El dominio de estas funciones lo forman todos los números reales excepto aquellos que anulan el denominador (habrá entonces que dividir por cero y eso no tiene sentido) (Santillana, Bachillerato 1º. 1996. p. 202)..

RAZONES POR LAS QUE EL DOMINIO DE DEFINICIÓN PUEDE RESTRINGIRSE

Imposibilidad de realizar alguna operación con ciertos valores de x.

Por ejemplo: Denominadores que se anulan (Anaya. 2000. Bachillerato 1º p. 191).

Por otra parte, en los libros de texto aparece 0/0 al estudiar los límites...:

Comentarios

En los casos 1,2 y 3 señalados antes la forma $a/0$ se refiere, en los dos primeros casos a una razón, y en el tercero a un cociente de polinomios (aunque se usa terminología de fracciones, dado que en el texto se habla de “denominador”). En los textos, o no se dice nada cuando aparece esta expresión, como es el caso 1; o bien, se hacen afirmaciones justificativas en términos de división o de fracción. En particular se habla de:

- inexistencia porque la división por cero no está definida (2),
- que dividir por cero no tiene sentido (3)
- que es imposible realizar la operación cuando el denominador se anula (3).

Los términos *inexistencia*, *indefinición*, *imposibilidad* y *sin sentido* se usan aquí para dotar de significado a la forma $a/0$. ¿Pero, cuál es su significado más preciso?

Marco teórico

En dos trabajos recientes (Tsamir 1996; Tsamir y Tirosh, 2000) se analizaron las concepciones (concepciones intuitivas o intuiciones, en su terminología) de estudiantes para profesores y de estudiantes de secundaria en relación con los casos de la división por cero.

Estos trabajos se ubican en una línea de trabajo en Didáctica de la matemática cuyo propósito principal es analizar y observar bajo control las concepciones intuitivas de los estudiantes y ayudarles a la construcción de nuevas intuiciones consecuentes con las definiciones matemáticas.

Las autoras concluyeron que las justificaciones de los estudiantes dependen del nivel académico de matemáticas adquirido. Así, señalan que los estudiantes de un nivel superior justifican sus respuestas utilizando argumentos con base matemática, mientras los de nivel bajo utilizan una variedad de justificaciones. A saber, las que se basan en el modelo de partición de la división, en la atribución de un valor a las expresiones dadas o en la idea de estar ante una regla o convenio. En síntesis, de su trabajo se desprenden las siguientes categorías de respuestas:

Categorías de respuestas (las cursivas son nuestras)

C.1. Respuestas que se apoyan en la definición de la división con base en la multiplicación. El cociente de $a:b$ es el único número x que cumple $b \cdot x = a$.

C.1.1. *Indefinición por inexistencia del valor*. Si $b = 0$ y $a \neq 0$, no existe x tal que $0 \cdot x = a$, ya que $0 \cdot x$ siempre es 0. Así que estamos ante un caso de indefinición (no cumple la definición)

C.1.2. *Indeterminación*. Si $b = 0$ y $a = 0$, todo x verifica que $0 \cdot x = 0$, ya que $0 \cdot x$ siempre es 0. Así que estamos ante un caso de indeterminación.

C.2 Respuestas que utilizan la noción de límite.

C.2.1. *Indefinición por inexistencia del límite*. $a:x$ cuando x tiende a cero por la derecha y por la izquierda es diferente... Como hay un salto en el punto cero, es imposible encontrar un número para $a:0$ con $a \neq 0$ (no cumple la definición de límite, que existe cuando los límites laterales son iguales)

C.3. Respuestas que se apoyan en el modelo de partición de la división y la justificación con ejemplos reales.

C.3.1. *Imposibilidad de operar*. Caso $5 \div 0$. Es imposible dividir por cero, como no hay nada para dividir, entonces no hay un resultado para $5:0$. Tú no puedes llevar a cabo una división de 5 pasteles, en partes iguales, donde no hay niños.

C.3.2. *Imposibilidad de operar*. Caso $0 \div 0$. Si uno no tiene canicas y no hay niños para repartir... ¿qué posibilidad tengo de dar algo a alguien? Es imposible.

C.4. Respuestas que se apoyan en la percepción de estar ante una regla o convenio.
- Así me lo dijo mi profesor.

C.5. Respuestas que se apoyan en la atribución de un valor.

C.5.1. Caso $5 \div 0$.

- C.5.1.1. Caso $5 \div 0 = 0$. Como el resultado de multiplicar algo por cero es siempre cero, dividiendo algo por cero nos da el mismo resultado.
- C.5.1.2. Caso $5 \div 0 = 5$. Con ejemplos reales. Yo no he dividido por nada así que todavía tengo cinco. Dividiendo cinco canicas entre nadie te sales con cinco canicas.
- C.5.1.3. Caso $5 \div 0 = \infty$. Con una interpretación dinámica. Cuando el divisor es cada vez más pequeño el resultado es cada vez más grande... En el límite será infinito.

C.5.2. Caso $0 \div 0$.

- C.5.2.1. Caso $0 \div 0 = 0$. Cero multiplicado por algún número y cero dividido por algún número es cero. Sí tú tienes, por ejemplo, no hay tarta y no hay niños para darles, entonces no hay nada, no tarta y no niños, cero de algo.
- C.5.2.2. Caso $0 \div 0 = 1$. Sobregeneralizaciones concluidas de las reglas matemáticas $a \div a = 1$
- C.5.2.3. Caso $0 \div 0 = \infty$.

RESPUESTAS DE NUESTROS ESTUDIANTES

La forma de plantear la cuestión en el trabajo de Tsamir y Tirosh es en términos de división, por lo que quedan fuera otras interpretaciones de las expresiones $a/0$ y $0/0$, como son razón y fracción. También deja fuera otras categorías de respuestas, por ejemplo, la estructuralista donde la división es la multiplicación por el inverso, y como el inverso de cero no existe, tanto $a \div 0$ y $0 \div 0$, son expresiones indefinidas y una es un caso particular de la otra.

Para profundizar el estudio precedente en el sentido de poder averiguar si las categorías de respuestas observadas por las autoras citadas son fruto de una forma de enseñanza, en un país determinado o de una forma de plantear la cuestión, o si, por el contrario, son propias de la enseñanza de las matemáticas en general nos planteamos hacer una indagación con algunos de nuestros estudiantes. Hicimos una encuesta piloto con estudiantes de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Valencia, adscritos a un curso de Didáctica de la Matemática de carácter optativo, para contrastar las categorías de respuestas observadas por Tsamir y Tirosh. Los datos obtenidos nos dieron indicios de que la mayoría de las respuestas parecían corresponder a las del nivel académico bajo. Éstas son las respuestas:

	1.1	1.2	2	3.1	3.2	4	5.1.1	5.1.2	5.1.3	5.2.1	5.2.2	5.2.3
1				•	•							
2				•	•				•			
3				•	•							
4						•			•		•	
5						•			•			
6			.mal								•	
7				•	•							
8								•	•	•	•	
9				•	•							
10									•			
11					•				•			
12				•	•							

Los datos de la tabla son indicativos del predominio del modelo implícito de la división, como recurso para justificar su respuesta. No aparecen las justificaciones de base matemática C.1 y C.2. Tampoco aparece la justificación exstructuralista. Y se observa un centramiento en la idea de que $5 \div 0$ es ∞ . En algunos casos la cuestión planteada hizo emerger:

-Inconsistencias, como por ejemplo dar el valor $\pm\infty$, y decir que en realidad no existe cociente ya que no se puede dividir entre cero.

Estudiante número 6:

$5/0 = \pm\infty$, se pone este símbolo infinito, pero en realidad no existe ya que no se puede dividir entre cero (en algunos casos se usa $5/0 = +\infty$ para operar).

- Confusión y falta de precisión en el uso del término *indeterminado* (9 de 12 estudiantes utilizan la palabra indeterminación de un modo inapropiado: sinónimos de indefinición, o de imposible “según de donde lo obtengamos sale una cosa u otra”...).

Estudiante número 6:

$0/0$ es una indeterminación, suele ser el resultado de un límite y decimos que es una indeterminación porque según de donde lo obtengamos sale una cosa u otra.

- Predominio de la interpretación del cero como la nada.

Estudiante número 9:

$0/0$: Un niño vería $0/0 = 1$, o en general $n/n = 1$.

Aunque si vemos 0 cosas entre 0 amigos, es nada. Entonces, también se daría el caso que la respuesta fuese $0/0 = 0$

Estudiante número 12:

$5/0 = \pm\infty$, dividimos un número entre nada y nos da un número muy grande.

$0/0 =$ indeterminación, dividimos nada entre nada y por tanto no sabemos lo que nos da nada, nos puede dar cualquier número.

- Sentimientos negativos acerca del aprendizaje de reglas.

Estudiante número 11:

... $n/0$... nos han dicho que es ∞ . Así pues, en este momento, no me siento preparada para dar una respuesta que no sea la que me han enseñado, la que nos han hecho creer: “ $0/0$ es un indeterminado”.

- Justificación de los dos casos $a : 0$ y $0 : 0$ con la misma argumentación.

Estudiante número 2:

$5/0 =$ es una indeterminación. Esto significa que no tiene sentido dividir, en este caso 5, entre algo que no tienes. Lo que dará debe ser ∞ ya que puedes hacer ∞ particiones de un número...

0/0 es una indeterminación, no tiene sentido dividir algo que no tienes entre algo que tampoco tienes.

-Falta de uso del término *indefinido* y evitar el término *imposible*.

Finalmente, cabe señalar, de acuerdo con las autoras del trabajo original, que se observa el predominio del modelo primitivo implícito de la división, y la inconsistencia de los estudiantes, ya que justifican las respuestas acerca de $a \div y$ y $0 \div 0$ utilizando el modelo partitivo de la división a pesar de que durante sus años de escolaridad han trabajado con expresiones de división con divisores negativos. Es evidente que, por ejemplo, $5 \div (-3)$ contradice la idea de que la división es un reparto, o una partición. Esto no debe sorprendernos, dado que en los años de escolaridad jamás se les ha dado a los estudiantes una definición de la división de enteros, y mucho menos, una definición general de división.

Bibliografía

- TSAMIR, P. (1996). "Two problems under one title: The case of division by cero". PME
- TSAMIR, P.; TIROSH, D. (2000). *Intuitions and undefined operations: the cases of division by cero. Focus on Learning Problems in Mathematics*. Vol. 22; nº 1 (p. 1-16). (Traducción para uso interno de M^a Ángeles Lonjedo y Asunción Oliver)
- ANAYA (2001). Bachillerato. *Matemáticas I*. (Colera, J.; García, R. y Oliveira, M^a. J.) Madrid. Grupo Anaya,
- ANAYA (2001). Bachillerato. *Matemáticas II*. (Colera, J.; García, R. y Oliveira, M^a. J.) Madrid. Grupo Anaya,
- SANTILLANA (1996). Bachillerato. *Matemáticas 1*. Ciencias de la Naturaleza y de la Salud. (Negro, A.; Benedicto, c.; Martínez, M. y Nevot, A.) Madrid. Santillana S.A.