

Los problemas de probabilidad condicional en la Enseñanza Secundaria*

M. Pedro Huerta Palau (Universidad de Valencia)

María Ángeles Lonjedo Vicent (I.E.S. Ramón Llull – Valencia)

Nivel educativo: **Bachillerato**

El trabajo que presentamos aborda la problemática de la enseñanza y aprendizaje de los problemas de probabilidad en la enseñanza secundaria. En un primer lugar, clasificamos los problemas en tres grandes bloques: problemas de asignación, problemas de cálculo y problemas de simulación. Consideramos en particular los problemas de cálculo y de ellos los problemas de probabilidad condicional. Presentamos una forma de clasificar estos problemas atendiendo a los datos contenidos en el enunciado, mostrando que en los libros de texto de la enseñanza secundaria no se abordan todos los tipos posibles de problemas. Finalmente, mostramos una experiencia con alumnos de bachillerato que resuelven cinco de los tipos de problemas de probabilidad condicional, problemas cuyos datos facilitan el razonamiento aritmético frente al algebraico y probabilístico.

Introducción

Es una tradición que la probabilidad y la estadística sea una de las partes de las matemáticas escolares que menos atención se le preste por parte de maestros y profesores, tanto en la enseñanza obligatoria como en la post-obligatoria. Muchos han expuesto las razones por la que creen que esto es así —por ejemplo, Shaughnessy (1992)— pero las evidencias las podemos encontrar casi a diario: generalmente no se imparte el currículum o se aplaza para mejor ocasión, no se asiste a cursos o seminarios de formación, que generalmente no se imparten por falta de asistentes, optando con mejor o peor criterio por otros cursos o seminarios. Algunos han propuesto medios para intentar salvar estas dificultades —por ejemplo, Rasfeld (2001) y también Shaughnessy, (1992)— y que apuntan, entre otras cosas, hacia una formación mayor y mejor del profesorado.

Lo que vamos a presentar aquí tiene que ver con los problemas escolares de probabilidad. Nos referimos a problemas que, situados en un contexto aleatorio, preguntan, de algún modo, por la probabilidad de un suceso. Concretamente, tienen que ver con los problemas de probabilidad condicional que, teniendo su ubicación en la enseñanza post-obligatoria, pueden ser tratados, en algunos casos, en la enseñanza obligatoria. Esto, si la manera en la que se presentan y se resuelven no implica un tratamiento algebraico que los haga incomprensibles y difíciles de resolver.

* Comunicación presentada en las XI Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas (JAEM). Canarias, Julio de 2003. ISBN. 84-689-0720-0.

Problemas de asignación y problemas de cálculo de probabilidades. Los problemas de probabilidad condicional

Los problemas de probabilidad pueden clasificarse de muchas maneras. Una de ellas es la que vamos a presentar aquí y que los distingue atendiendo al resolutor y a la estructura de cantidades presentes en el enunciado del problema. Este punto de vista nos permite distinguir los problemas de probabilidad en tres clases: problemas de asignación, problemas de cálculo y problemas de simulación. No tomamos en consideración aquí los problemas de probabilidad por simulación, el lector interesado podrá consultarlo en Huerta (2003).

Llamamos problema de cálculo de probabilidades a los problemas de probabilidad en los que para dar una respuesta es necesario aplicar relaciones o reglas de cálculo entre los datos del problema, distinguiéndolos así de los que son de asignación de probabilidades en los cuales la respuesta supone tomar una decisión sobre la probabilidad de un suceso a partir de los datos contenidos en el problema. No podemos establecer una línea que divida claramente ambas tipologías, y con la que todo el mundo podría estar de acuerdo, ya que muchos de los problemas que nosotros clasificamos como de asignación se suelen resolver como problemas de cálculo, incluyendo aquellos que se resuelven simplemente mediante la aplicación de la regla de Laplace y que para nosotros no son más que problemas de asignación.

Llamamos problema de probabilidad condicional a aquellos en los que o bien en los datos o bien entre las preguntas del problema el resolutor ha de considerar la probabilidad condicional de un suceso.

Yañez (2001) asegura que el único registro que permite resolver todos los problemas de probabilidad condicional es el registro algebraico, ya que existe una tipología particular para ellos que tiene que ver con los datos contenidos en su enunciado y que sólo pueden resolverse mediante las expresiones algebraicas que los relacionan. Se refiere a los problemas cuyo enunciado contiene como datos tres probabilidades condicionales.

Considerando la definición de la probabilidad condicional como una relación multiplicativa entre tres probabilidades, $p(A|B)$, $p(A \cap B)$ y $p(B)$, y que los problemas de probabilidad condicional tienen que ver con los problemas que implican a dos sucesos A y B , podemos analizar los problemas de los que hablamos mediante grafos trinomiales (Cerdán y Huerta, 2003) y clasificarlos en aritméticos y algebraicos atendiendo a si el grafo correspondiente se autodestruye o no con los datos contenidos en el problema y según si se pueden resolver mediante el uso de los sistemas de representación, como los diagramas en árbol y las tablas de contingencia, de una manera individual o en combinación, o si se requiere del álgebra para su resolución (Huerta, 2003).

Puesto que todos los problemas de probabilidad condicional que tratamos pueden resolverse mediante relaciones multiplicativas y aditivas trinomiales, los datos que contengan los enunciados de los problemas deberán ser tales que, en efecto den lugar a un problema —es decir, su solución no sea obvia— y tales que aplicando las relaciones correspondientes pueda obtenerse su solución. De esta manera, escogidos los datos de entre lo que llamamos probabilidades marginales — $p(A)$, $p(\sim A)$, $p(B)$, $p(\sim B)$ —, proba-

bilidades de intersección — $p(AB)$, $p(\sim AB)$, $p(A\sim B)$ y $p(\sim A\sim B)$ — y probabilidades condicionales — $p(A|B)$, $p(\sim A|B)$, $p(A|\sim B)$ y $p(\sim A|\sim B)$ —, sólo pueden definirse 9 tipos de problemas diferentes de probabilidad condicional. Estos problemas pueden describirse mediante vectores de tres componentes (i, j, k) , que toman valores entre 0 y 3 y tales que $i+j+k=3$. Los nueve tipos de problemas existentes están caracterizados por los vectores siguientes:

- a) Tres del tipo $(x,y,0)$
 - Tres intersecciones $(0, 3, 0)$
 - Dos intersecciones y una marginal $(1, 2, 0)$
 - Dos marginales y una intersección $(2, 1, 0)$
- b) Tres del tipo $(x,y,1)$
 - Dos marginales y una condicional $(2, 0, 1)$
 - Dos intersecciones y una condicional $(0, 2, 1)$
 - Una intersección, una marginal y una condicional $(1, 1, 1)$
- c) Dos del tipo $(x, y, 2)$
 - Una marginal y dos condicionales $(1, 0, 2)$
 - Una intersección y dos condicionales $(0, 1, 2)$
- d) Una del tipo $(0, 0, 3)$
 - Tres condicionales $(0, 0, 3)$

Esta caracterización permite, por ejemplo, realizar un primer análisis de los problemas de probabilidad condicional en los libros de texto de la enseñanza secundaria. Este análisis nos revela que solamente unos pocos tipos de problemas suelen tratarse en ellos. Es decir, ni aun considerando todas las colecciones de textos escolares a las que hemos tenido alcance hemos podido completar los 9 tipos de problemas de probabilidad condicional, y eso a pesar de que el único tipo de problema que podemos considerar como algebraico es el del tipo $(0, 0, 3)$. Consecuentemente, el conocimiento de la estructura y la competencia en el uso de los diagramas en árbol y de las tablas de contingencia es suficiente para resolver 8 de los 9 tipos de problemas de la probabilidad condicional, lo cual acerca estos problemas a la secundaria obligatoria y les hace verdaderamente asequibles a los estudiantes del bachillerato.

El razonamiento aritmético en algunos problemas de probabilidad condicional

No todos los problemas de probabilidad condicional son de los que nosotros clasificamos como problemas de cálculo. Esto depende de la estructura de cantidades que está presente en ellos y si esas cantidades significan probabilidades o no para el resolutor. Mostremos un ejemplo:

En un centro escolar hay 1000 alumnos repartidos de esta manera:

	Chicos (A)	Chicas ($\sim A$)
Usan gafas (B)	147	135
No usan gafas ($\sim B$)	368	350

Se escoge uno alumno al azar. Obtén (calcula, asigna) las probabilidades siguientes:

a) Sabiendo que es chico, que no use gafas.

b) Sea chica, sabiendo que usa gafas.

El problema es del tipo (0, 3, 0) y procedemos como problema de cálculo.

Se tiene: $p(AB) = 0'147$, $p(A\sim B) = 0'368$, $p(\sim AB) = 0'135$, $p(\sim A\sim B) = 0'350$ como datos del problema, interpretados como probabilidades.

Se pide: $p(\sim B|A)$ y $p(\sim A|B)$

La resolución por cálculo:

a) $p(\sim B|A) p(A) = p(A\sim B)$

$p(A) = p(AB) + p(A\sim B) = 0'515$. Por tanto, de $p(\sim B|A) \times 0'515 = 0'368$ se obtiene la solución: $p(\sim B|A) = 0'715$.

De manera similar reolveríamos el apartado b.

El problema del tipo (0, 3, 0) como problema de asignación.

Tomados los datos del problema como cantidades que se mencionan explícitamente en el problema, los datos pueden completarse en la forma en la que se recoge en la tabla siguiente:

	Chicos (A)	Chicas ($\sim A$)	Totales
Usan gafas (B)	147	135	282
No usan gafas ($\sim B$)	368	350	718
Totales	515	485	1000

Las cantidades que llamamos totales en la tabla son, de algún modo, cantidades mencionadas implícitamente por el problema y obtenidas mediante las relaciones aditivas en la propia tabla de contingencia.

- a) Lo conocido, ser chico, fuerza a restringir la muestra, 1000, a los posibles, los chicos, 515, de los que se pregunta cuántos no usan gafas, 368. Expresar esta relación se constituye en la probabilidad de que no use gafas sabiendo que es chico y para ello tenemos más de una forma de hacerlo: 368 de 515 , $368/515$, $71'5\%$ ó $0'715$.

De la misma manera podemos asignar probabilidades, no sólo al suceso por el que se nos pregunta, sino a cualquiera que relaciones los sucesos A y B y sus complementarios.

La experiencia con estudiantes del bachillerato

La experiencia que describimos aquí la hemos llevado a cabo con 11 estudiantes entre 1.º, 5 alumnos, y 2.º, 6 alumnos, de Bachiller de Matemáticas I y II del IES Ramón Llull de Valencia que participaron de manera voluntaria en la experiencia.

Este grupo de alumnos no han tenido formación sobre probabilidad, pues en el Departamento de Matemáticas de este IES, como en otros, siempre se deja para el final del temario la probabilidad, y como no se acaba el temario, es la probabilidad, sin lugar a dudas, lo que nunca se trabaja.

Los cinco problemas de que consta la prueba han sido elegidos de una pequeña batería que se corresponden con los nueve tipos de problemas de probabilidad condicional citados anteriormente. Los que hemos propuesto que resuelvan nuestros estudiantes en esta experiencia se corresponden con las siguientes tipologías: tres intersecciones (0, 3, 0), 1 marginal y dos intersecciones (1, 2, 0), 2 marginales y una intersección (2, 1, 0), 2 marginales y una condicional (2, 0, 1) y 2 intersecciones y una condicional (0, 2, 1).

Los datos en los problemas se les han presentado de la forma siguiente: en el primero se organizan en una tabla de contingencia con frecuencias absolutas (problema citado anteriormente), en el segundo mediante frecuencias absolutas con cantidades dadas en forma implícita y los tres últimos en porcentajes.

Los estudiantes dispusieron de tres cuartos de hora para resolver la prueba.

Resultados

Un primer resultado que encontramos es que todos nuestros estudiantes han razonado de forma aritmética. Pensamos que esto es debido a la forma en la que las cantidades están presentes en los problemas, ningún problema proporciona las cantidades en términos de probabilidades.

Otro resultado manifiesta que la mayoría de estudiantes tienen confusión entre la probabilidad de la intersección y la probabilidad condicionada. Esta confusión ya ha sido identificada en otros trabajos (por ejemplo, Grass & Totohasina, 1995). Pero, esta confusión no se ha dado en el último problema pues el 45.45% lo ha resuelto correctamente sin que

se haya manifestado esa confusión. Estos estudiantes escriben: “El 40% no hacen baloncesto $\rightarrow$ de éstos el 40% hacen fútbol”. Han reducido el espacio de posibilidades a los que no hacen baloncesto. Podemos decir que hay una forma de presentar los datos en los problemas de probabilidad condicional que favorece la comprensión y su resolución.

Todos los estudiantes han intentado resolver el problema que hemos mencionado antes, mostrando un razonamiento aritmético antes que probabilístico. Para afirmar esto nos hemos basado en que un 72.72% expresa el resultado en porcentajes, sin que ello suponga que el porcentaje refiera una probabilidad. Sólo un alumno utiliza términos de probabilidad y otro se expresa en términos de razón.

El 45.45% confunden la probabilidad condicional que se pide en la segunda pregunta con la que se pide en la primera. Es razonable, por tanto, preguntarse si el hecho de pedir en esta segunda pregunta la condicional invertida les ha llevado a dicha confusión, apareciendo de nuevo un 36.36% que presentan la ya citada confusión entre intersección y condicional.

Conclusión

Hemos querido mostrar aquí que hay algunos problemas en los libros de texto que, ubicados en lecciones de probabilidad, son resueltos por los estudiantes mediante razonamientos aritméticos y no probabilísticos. Los estudiantes que utilizan el razonamiento aritmético para la resolución de estos problemas convierten intuitivamente los problemas de probabilidad condicional que inicialmente han sido pensados como problemas de cálculo de probabilidades en problemas de asignación de probabilidades.

Bibliografía

- CERDÁN, F., HUERTA, M. P. (2003): *Using trinomial graph to analyze conditional probability problems* (en preparación)
- HUERTA, M. P. (2003): *Didàctica de la probabilitat i l'estadística* (texto presentado para su publicación). Universitat de València.
- RASFELD, P. (2001): “The role of statistics in school mathematics teaching today”, *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, consultada en <http://www.ex.ac.uk/cimt/ijmtl> e117/9/2001.
- SHAUGHNESSY, J. M. (1992): “Research in Probability and Statistics: Reflections and Directions”, en D. Grouws (ed.) (1992), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, pp. 465-494. Macmillan Publishing Company. New York.
- YÁÑEZ, R. (2001): “El Álgebra, las Tablas y los Árboles en Problemas de Probabilidad Condicional”, en GÓMEZ, P., y RICO, L. (eds.), *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro*. Editorial Universidad de Granada. Granada.