A Paco, a María y a Marta.

PRESENTACIÓN.

Con este libro lo que he pretendido es acercar un poco del programa *DERIVE* para Windows, a la enseñanza de las Matemáticas en Secundaria. No es un manual de *DERIVE* al completo. Si que hay una primera parte en la que se presenta el manejo de *DERIVE*, sobre todo de la pantalla algebraica y de la pantalla gráfica 2D. *DERIVE* presenta muchas más prestaciones.

En la segunda parte hay una bateria de prácticas dirigidas especialmente a los alumnos y las alumnas de la Enseñanza Secundaria. No todas estas prácticas son creación mía; algunas son mías, otras han sido "bajadas" por Internet de unos trabajos franceses, y otras las he recogido de algunos cursos que he hecho. Lo que si que he realizado en todas ha sido el pasarlas a *DERIVE* para Windows, y darles la estructura común que tienen todas.

Quiero dar las gracias a mi familia, Paco, María y Marta, pues he tenido el tiempo suficiente para realizar este libro. También quiero dar las gracias a Ricard Peiró, pues él me ha facilitado mucho material, con el que he podido trabajar y extraer buenas ideas. A mi hermano Luis, porque es el autor de la portada. Y no me quiero olvidar de agradecer a la Fundación Santa María la oportunidad que me ofreció de participar en un curso, "El pensamiento matemático, eje de nuestra cultura", en el que disfruté y aprendí muchas cosas, de las que algunas fueron sobre *DERIVE*, y me ayudaron a acabar de confeccionar este material.

He tenido la oportunidad de participar como ponente en un curso en el CEFIRE de Valencia, "Matemáticas con *DERIVE* en la enseñanza secundaria", y además de agradecer al CEFIRE el haber contado conmigo, me ha sido muy beneficioso pues he aprendido muchas cosas que no conocía sobre *DERIVE*, y he rectificado algunas erratas que tenía.

NOS ACERCAMOS A *DERIVE* PARA WINDOWS

"El propósito de los cómputos son las ideas, no son los números"

RICHARD HAMMING

"Una imagen vale más que mil palabras, siempre que la imagen llegue a ser entendida adecuadamente"

MIGUEL DE GUZMÁN

1. - PEQUEÑA INTRODUCCIÓN.

DERIVE es un programa hawaiano de cálculo simbólico. *DERIVE* es una herramienta, un ayudante. No es una herramienta que sustituye, no nos resuelve los ejercicios de Matemáticas porque sí, nos ayuda a que con nuestros conocimientos y su velocidad y capacidad de cálculo, resolvamos nosotros.

Para adquirir el programa *DERIVE* puedes acudir a su distribuidor en España, que actualmente es:

DERISOFT: Fax 907-330371; ☎ 607-330370.

🖂 e-mail: derisoft@vlc.sevicom.es

A través de Internet puedes obtener más información en la dirección http://www.upv.es/derive/.

DERIVE tiene una versión para MSDos y otra para windows. *DERIVE* para windows tiene la estructura de todos los programas de ventanas:

I. **El menú con palabras**, al que nos acercamos con el ratón a cada una de estas palabras y se despliega toda una serie de comandos. Tiene los menús Archivo, Edición y Ayuda típicos de windows. Los demás son específicos de *DERIVE*.

II. **El menú con botones,** o Barra de Herramientas, que normalmente es un resumen de los anteriores, ó simplemente están representados los comandos más utilizados.

2. - ESCRIBIMOS EXPRESIONES.

Para empezar a escribir expresiones utilizaremos el comando Editar Expresiones del menú principal, ó el botón del lápiz del menú de botones. También podemos hacerlo desde el teclado con Ctrl A.

	→ EDITAR EXPRESIONES
ESCRIBIMOS EXPRESIONES	→ Botón Lápiz
	→ Ctrl+A

Si escribimos: Estoy tan contenta, ¿qué pasa?

Probamos y vemos que *DERIVE* "escupe", (y esto es lenguaje derivero), un producto de letras con algunas en mayusculas cogiendo a otra entre paréntesis. Vamos a explicar un poco esto. *DERIVE*, mientras no le digamos lo contrario, interpreta las letras como variables, Además para *DERIVE* hay algunas combinaciones de letras que forman funciones internas, como las trigonométricas, "sin, cos, tan, asin, acos, atan,... " la función exponenecial, "exp", la parte real. "re"...

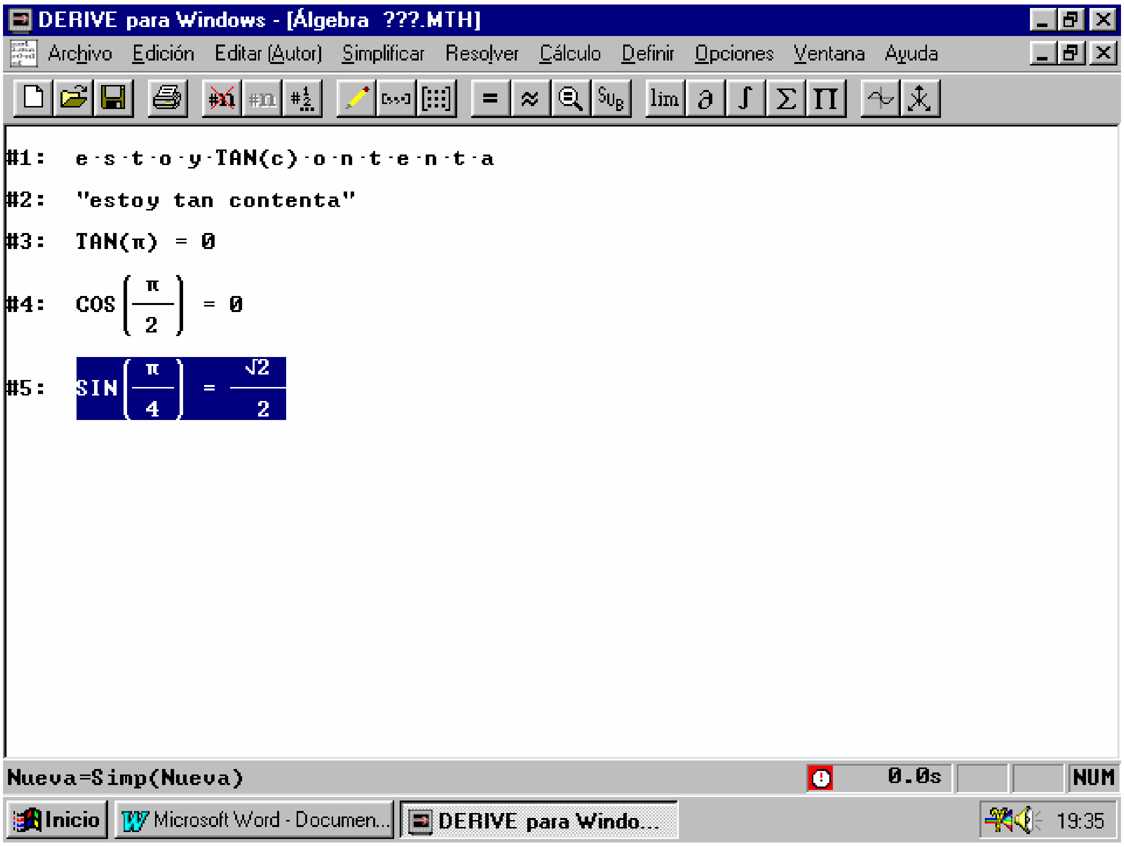
Para escribir una frase con *DERIVE*, tenemos que escribirla entre comillas. Todo lo que escribamos entre comillas, *DERIVE* lo respetará.

En las expresiones 1 y 2 del ejemplo vemos lo que acabamos de explicar.

En las tres siguientes tenemos tres cálculos realizados desde Editar. Son funciones trigonométricas que *DERIVE* reconoce en inglés. Para escribir los radianes, π ó cualquiera de las expresiones que lo contienen, lo podemos hacer de tres formas:

a) Escribiendo pi
b) Utilizando el teclado que nos aparece en la ventana de Editar expresión
c) Ctrl+p

Una vez que tenemos la expresión preparada para que *DERIVE* calcule, antes de apretar el botón SI, hay que escribir un =: $\tan(\pi)$ =.



Para escribir con *DERIVE* tenemos que tener en cuenta que estamos escribiendo como con una máquina de escribir, sin "editor de ecuaciones", a la antigua usanza. Tendremos muy claro la jerarquía de las operaciones matemáticas, y pondremos tantos paréntesis como nos hagan falta.

JAMÁS pondremos corchetes, pues para *DERIVE* los corchetes significan vectores.

Vamos a practicar escribiendo expresiones, recordando que:

- → Para escribir un cociente haremos /
- → Para elevar utilizaremos el acento circunflejo: picaremos 2^3. *DERIVE* escupirá en la pantalla la expresión preciosa: 2^3
- → Para una raíz cuadrada podemos hacerlo de dos formas: Ctrl+Q ó pinchando √ del teclado que aparece

- → Para cualquier raíz la consideraremos como potencia de exponente racional.
- → Para el número e y el número imaginario i, también lo podemos hacer de dos formas, ó bien utilizando el teclado que aparece en Editar expresión, ê, î, ó bien con Ctrl+e, Ctrl+i.. Nos aparecen con el acento circunflejo para que no haya duda de lo que representan.

PARA ESCRIBIR FUNCIONES CON *DERIVE*

Podemos definir funciones con *DERIVE*. Basta con darle un nombre a la función, una variable independiente y desde el comando **Editar Expresión**, escribir la función poniendo dos puntos antes del igual:

Editar expresión/ F(x): = x^2+3, para que en la ventana algebraica nos aparezca:

F(x): $=x^2+3$.

Una vez introducida la función, nos es muy fácil pedir una tabla de valores. Por ejemplo, y también haciendo uso del comando Editar expresión, escribimos F(3)=, y en la ventana nos aparece el valor.

Si la función que queremos introducir está definida a trozos, podemos introducirla haciendo uso del IF. Por ejemplo, si queremos introducir la función: $g(x) = \begin{cases} -6-2x & x \in \left]-4,-2\right] \\ -x^2 & x \in \left]-2,2\right[\\ -4 & x \in \left]2,5\right] \end{cases}$, desde **Editar expresión**, picamos:

g(x): =If(-4<x<=-2, -6-2x, If(-2<x<2, -x^2, if(2<x<=5, -4))).

Es decir, vamos introduciendo If, cada uno detrás de una coma y delante de un paréntesis. Cerraremos los paréntesis al final.

De una forma general utilizaremos la siguiente sintaxis:

IF(<condición>,<valor verdadero>,<valor falso>)

Otra forma de introducir este tipo de funciones, es usando una función auxiliar de *DERIVE*: la función chi:

g(x):=chi(-4,x,-2)(-6-2x)+chi(-2,x,2)(-x^2)+chi(2,x,5)(-4)

También podemos definir una función con la orden **Definir/ Función**. Nos aparece una ventana en la que se nos pide en primer lugar el nombre de la función y el argumento, y en segundo lugar la expresión de la función. De las dos formas el resultado es el mismo.

DERIVE tiene funciones internas que podemos utilizar. Vamos a citarlas:

LCM: Mínimo común múltiplo.

GCD: Máximo común divisor.

QUOTIENT(,): Hace el cociente entre dos polinomios.

REMAINDER(,) : Halla el resto de la división de dos polinomios.

TRUTH_TABLE:

NEXT_PRIME(): Halla el siguiente número primo al introducido en el paréntesis.

NOS MOVEMOS POR LAS EXPRESIONES:

Nos podemos mover por las expresiones utilizando las flechas del teclado a la vez que apretamos la flecha de mayúsculas⇧, o el ratón. Esto nos sirve para ir resaltando las expresiones. Además con el ratón podemos resaltar subexpresiones y bloques de expresiones.

COPIAMOS EXPRESIONES:

¿Y para qué queremos resaltar expresiones? Desde luego que para verlas mejor, pero también para copiarlas y no tenerlas que volver a picar. Si nosotros necesitamos “picar” una expresión que ya hemos escrito, la resaltamos, llamamos a Editar y apretamos F3. La expresión queda “pegada” en la ventana Editar.

3. -BORRAR EXPRESIONES, RECUPERARLAS, MOVERLAS Y RENUMERARLAS.

Utilizaremos los comandos situados en el menú Edición: $\begin{cases} \text{Borrar Ctrl} + \text{R} \\ \text{Recuperar Ctrl} + \text{U} \\ \text{Mover Ctrl} + \text{M} \\ \text{Renumerar} \end{cases}$, y

también podemos usar los tres botones situados en el tercer bloque: $\boxed{\#\cancel{n}}$, $\boxed{\#n}$, $\boxed{\#\begin{smallmatrix}1\\2\\...\end{smallmatrix}}$, que nos sirven respectivamente para eliminar, recuperar y renumerar.

Si en nuestra ventana algebraica “nos aparece” una expresión que no nos gusta y la queremos eliminar, tenemos que resaltarla y utilizar cualquiera de las tres formas que tenemos para borrarla: desde el teclado con Ctrl+R, desde el menú Edición con Borrar, o desde el botón $\boxed{\#\cancel{n}}$. Si queremos eliminar un bloque de expresiones actuaremos de la misma forma.

Una vez hemos eliminado las expresiones feas y hemos cometido un error, para recuperarlas, (se supone que las últimas que hemos eliminado), también tenemos tres formas de actuar: desde el teclado con Ctrl+U, desde el menú Edición con Recuperar, o desde el botón $\boxed{\#n}$. Al recuperar la expresión se situará por encima de la expresión que tengamos resaltada en la pantalla.

Si queremos que las expresiones nos aparezcan con otro orden distinto, la podemos mover de una en una o por bloques, usando el comando Mover del menú Edición, o bien desde el teclado con Ctrl+M.

Por último, después de haber eliminado, recuperado y movido las expresiones de la ventana algebraica, posiblemente tengamos la numeración de estas un poco desastrada. Podemos llegar al "orden total" renumerando las expresiones desde el menú Edición con Renumerar, o utilizando el botón $\boxed{\#\begin{smallmatrix}1\\2\\...\end{smallmatrix}}$.

Podemos practicar ahora este apartado: escribimos algunas expresiones

#1 “vamos a practicar”

#2 $\cos^2 x+\cos 2x+\cos x^2$

#3 $\dfrac{2x-1}{x+1}$

#4 $a+\dfrac{b}{c+d}$

Si nos equivocamos al escribir alguna de estas expresiones, las borramos y las escribimos bien. Una vez hemos conseguido escribir todas las expresiones, podemos empezar cambiando el orden, por ejemplo dejamos 1, 4, 3, 2. Cuando ya hemos movido todas las expresiones hasta conseguir el orden anterior, renumeramos. Y por último, eliminamos las dos expresiones que tenemos en la mitad, y las recuperamos dejándolas en los últimos lugares.

4.- UTILIZAMOS LA VENTANA GRÁFICA.

DERIVE tiene dos tipos de ventanas gráficas: 2D, y 3D.

¿Cómo llegamos a estas pantallas?

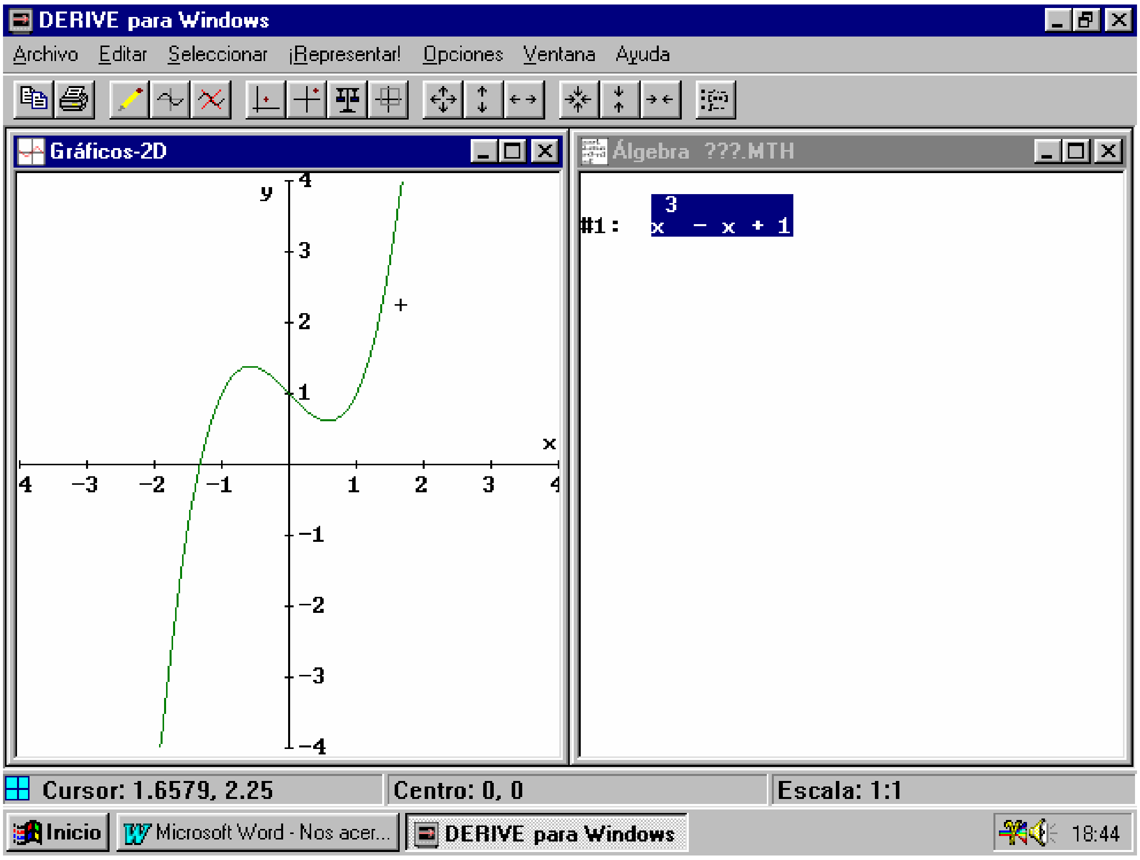
Cuando abrimos *DERIVE*, nos aparece la ventana algebraica, o de las expresiones. Podemos, antes de empezar a trabajar, preparar las ventanas para tenerlas a la vista. En el **menú Ventana** tenemos un comando: **Nueva ventana 2D**. Pinchamos y nos aparece un cambio en la pantalla: unos ejes de coordenadas con nuevos menús. Esta es la ventana gráfica. ¿Y la ventana algebraica? No ha desaparecido, podemos tenerlas las dos a la vista: en la pantalla las dos ventanas visibles a la vez. En el **menú Ventana** elegimos uno de los tres comandos: **Cascada**, **Mosaico vertical** o **Mosaico horizontal**. Según el comando que pinchemos las ventanas nos aparecerán en cascada, una a la derecha y otra a la izquierda,o una arriba y la otra abajo.

A veces nos es más útil tener toda la pantalla con la ventana gráfica. Entonces para pasar de una ventana a otra tendremos que utilizar los siguientes botones:

- si estamos en la ventana 2D y queremos pasar a la ventana algebraica, pincharemos el botón que está situado el último de la fila, y que tiene como dibujo un bloque de expresiones.
- si estamos en la ventana algebraica y queremos pasar a la ventana 2D, pincharemos el botón que está situado el primero del último bloque, y que tiene como dibujo unos ejes de coordenadas con una gráfica. El segundo botón de este último bloque nos abrirá la ventana 3D.

Si tenemos las ventanas en forma de cascada o en forma de mosaico, podemos pasar de una a otra además, pinchando con el ratón.

Vamos a dibujar con *DERIVE*. Para ello escribiremos la función que queremos dibujar en la ventana algebraica, con **Editar expresión**, o bien utilizando el botón que lleva dibujado el lápiz. Una vez escrita la función, nos aseguramos que está resaltada, nos vamos a la ventana 2D y elegimos el menú **¡Representar!**, o bien pinchamos el botón que lleva dibujados los ejes cartesianos.



En esta pantalla de *DERIVE* tenemos visibles las dos ventanas; a la izquierda tenemos la ventana gráfica 2D, y a la derecha tenemos la ventana de las expresiones o ventana algebraica. También vemos que de las dos ventanas, la que está activada es la ventana 2D. Entonces los menús y los botones que aparecen son de esta ventana. Vamos ir uno a uno explicándolos un poquito.

- En el **menú Archivo** tenemos un poco lo de todos los programas Windows.
- En el **menú Editar** tenemos los comandos: **Crear anotación**, **Borrar anotación**, **Borrar gráfica**, **Copiar ventana** y **Marcar y Copiar**. El comando **Crear anotación**, que nos sirve para escribir una nota en la gráfica colocándola donde queramos, pues cuando lo activamos, nos pregunta en que posición horizontal y vertical queremos situar la nota. Además podemos elegir el color en el que queremos que aparezca la nota. El comando **Borrar anotación**, no tiene problemas el entender qué es lo que hace. En el caso de que hayan muchas anotaciones creadas, hay que situar el cursor en la anotación que se desea borrar antes de activar la orden. La orden **Copiar ventana**, nos sirve para copiar la ventana y pegarla en algún documento. Por ejemplo en un documento de Word. Copia la ventana sin menús, únicamente

la ventana. El comando **Marcar y copiar** lo utilizaremos cuando sólo necesitemos pegar en otro documento un trozo de la ventana gráfica. Cuando lo pinchamos, nos aparece un cursor grande que crea un rectángulo punteado en la zona que nosotros queremos copiar.-

- En el **menú Seleccionar** tenemos las siguientes órdenes: **Seleccionar/Centro**: Para situar el centro de la ventana convenientemente; **Seleccionar/cursor**: Para posicionar el cursor donde queramos; **Seleccionar/Escala**: Para "zumear" los ejes convenientemente; **Seleccionar/Rango**: Para elegir las medidas de los ejes.
- En el **menú ¡Representar!** sólo tenemos esta orden que lógicamente sirve para que aparezca la gráfica de la expresión que está resaltada en la pantalla algebraica.
- En el **menú Opciones**, tenemos las diferentes órdenes para configurar la ventana 2D según nuestras necesidades. Interesante en esta orden, el poder modificar, con **Opciones-Rejilla**, el número de intervalos que deben aparecer en cada eje . Si queremos dibujar una circunferencia, por ejemplo $x^2+y^2=1$, la gráfica no tiene apariencia "redonda", y esto es porque el número de intervalos que aparecen en cada eje es el mismo. Así, al menos que la ventana sea cuadrada, se produce una distorsión en la apariencia de las gráficas. Según monitores, un ajuste de 14/8 ó de 13/8 da buen resultado a pantalla completa, pues, naturalmente, es inevitable la distorsión si modificamos el tamaño relativo de la ventana, pues el programa siempre mostrará ese número de intervalos.
- En el **menú Ventana** tenemos la posibilidad de crear otras ventanas gráficas, o algebraicas, posicionarlas todas en cascada, o en mosaicos. También tenemos la posibilidad de poner o quitar la Barra de herramientas, que nosotros hemos llamado el menú de los botones, y la Barra de Estado, que nos indica la posición del cursor, el centro de la ventana, la escala y que aparece en la parte inferior de la ventana.
- El **menú Ayuda**, que nos intenta solucionar las dudas que nos van saliendo al trabajar con *DERIVE*.

En la **Barra de Herramientas** nos aparecen 6 bloques de botones:

- El primer bloque: tiene 2 botones, el primero para copiar la ventana y el segundo para imprimirla.
- El segundo bloque consta de tres botones: el primero para crear una anotación en la gráfica, el segundo para representar la gráfica y el tercero para borrar la última gráfica.
- El tercer bloque tiene cuatro botones: el primero centra el cursor con respecto a la ventana, el segundo centra el origen de coordenadas (también con respecto a la ventana), el tercer botón ajusta la escala, es decir, es el que nos sirve para aplicar el zoom para acercar o alejar indistintamente los dos ejes, y el cuarto botón nos ayuda a seleccionar el rango.
- El cuarto y quinto bloque de botones nos sirven para hacer zoom en los ejes, pero el mismo zoom a la vez. Si elegimos el primer botón de cada uno de los bloques, el zoom se aplicará a los dos ejes a la vez y el mismo; en el primer bloque para reducir, y en el segundo para ampliar. Los otros dos botones de cada grupo nos aplican el zoom en un eje sólo.
- El último bloque consta de un solo botón que nos sirve para llamar a la ventana algebraica.

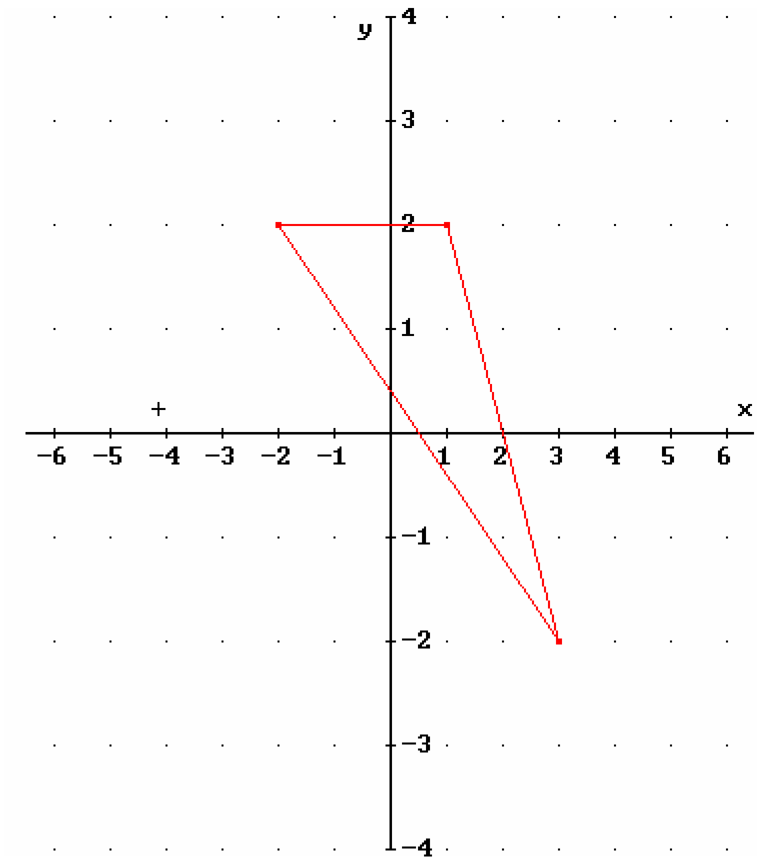
Trazamos puntos y segmentos con *DERIVE*

Para trazar un punto de coordenadas (a,b) es suficiente picar estas coordenadas entre corchetes separadas por una coma, y después representar con la ayuda del comando ¡Representar!.

Podemos intentarlo representando los puntos A(3, -2) y B(-2, 2) y su punto medio.

Si queremos dibujar muchos puntos podemos hacer una tabla colocando entre corchetes las coordenadas de cada uno de los puntos separados por comas (cada pareja de coordenadas también está entre corchetes). Por ejemplo [[1,2], [2,3], [3,4]]es la tabla que nos va permitir trazar los puntos de coordenadas (1, 2), (2, 3) y (3, 4).

Podemos trazar también los segmentos que determinan los puntos. Para esto activaremos en el comando **Opciones/Puntos/Unir/Si**. Los puntos que determinan un segmento tienen que estar seguidos en la tabla. Por ejemplo, en la gráfica siguiente hemos representado la tabla: [[1, 2], [3, -2], [-2, 2],[1, 2]]:



Podemos practicar trazando el cuadrilátero ABCD determinado por los puntos: A(3, -2), B(-2, 2), C(2, 3) y D(5, 0).

5.- RESOLVIENDO.

Vamos a empezar este apartado haciendo notar la diferencia entre el $\boxed{\text{Si}}$ y el $\boxed{\text{Simplificar}}$ de la orden Editar Expresión.

Por ejemplo vamos a escribir la expresión : x/4 + x/2.

Si le pulsamos la orden $\boxed{\text{Si}}$, en la ventana algebraica nos aparece, como expresión número 1 : #1 $\frac{x}{4}+\frac{x}{2}$

Si en lugar de pulsar $\boxed{\text{Si}}$, pulsamos $\boxed{\text{Simplificar}}$, nos aparece en la ventana algebraica la expresión: $\frac{3x}{4}$.

Con la orden Simplificar, *DERIVE* nos va adelantando trabajo.

Vamos a seguir trabajando el comando **Simplificar**. Si activamos la orden Simplificar del menú, en la ventana nos aparecen: **Normal**, **Expandir**, **Factorizar**, **Aproximar**, **Sustituir**.

La orden Simplificar Normal, es similar al =.

La orden Simplificar, Factorizar, factoriza la expresión. Por ejemplo si introducimos un número en el menú editar, y activamos el comando Simplificar, Factorizar, *DERIVE* nos hace la descomposición factorial del número; si introducimos un polinomio, nos factoriza el polinomio.

Vamos a realizar el siguiente **ejercicio**:

- Introducimos la expresión: $\sqrt{(xy)}-\sqrt{x}\sqrt{y}$
- Activamos la orden **Simplificar Normal**. ¿qué pasa?
- **Sustituimos x e y por –1** y ordenamos **Simplificar Normal**. Para sustituir una variable por un número tenemos que pinchar la orden **Simplificar/Sustituir/variable**.
- ¿Qué pasa?
- En este tipo de ejercicios en los que el dominio de las funciones está restringido a un subconjunto de la recta real, tenemos que declarar el dominio antes de intentar trabajar con ellas. El comando es: **Definir/ Dominio de una variable**.

Para practicar podemos realizar los siguientes ejercicios:

1. Tenemos que restringir los dominios de x y/ó y para que $\left(\frac{1}{x}\right)^{y} - x^{-y}$ sea 0.
2. Lo mismo con el dominio de x para que $\sqrt{\frac{1}{x}} \neq \frac{1}{\sqrt{x}}$
3. Idem para que $\ln(x^2) \neq 2\ln x$
4. También para α para que $\mathrm{atan}(\tan\alpha) \neq \alpha$

Vamos a utilizar ahora el comando **Simplificar / Expandir**. Introducimos en las expresiones: sin (a+b), y pulsamos la orden **Simplificar/Expandir**. ¿Qué pasa?. *DERIVE* nos ha "escupido" en la pantalla la misma expresión y ¡no ha hecho nada!. A *DERIVE* le hace falta que le digamos cómo queremos que trate las expresiones, por ejemplo las trigonométricas. Activamos el comando **Definir / Modos de operar / Simplificar/** y elegimos el modo de las transformaciones. En nuestro caso estamos operando con una trigonométrica, elegimos **Trigonometría/ Expand**. Repetimos la operación, resaltando la expresión trigonométrica, y pulsando Simplificar / Expandir, y *DERIVE* nos desarrolla la expresión del seno de la suma de dos ángulos.

Si queremos que *DERIVE* trabaje la expresión Ln (uv), también tendremos que preparar el estado de la ventana algebraica antes de trabajar. Pulsamos el comando **Definir / Modos de operar / Simplificar**, y en **Logarítmicas** elegimos **Expand**. Si pulsamos ahora, resaltando la expresión anterior, la orden **Simplificar/expandir**, ¿qué hace *DERIVE*?. Tenemos que definir el dominio de las variables que aparecen, u y v. Lo hemos trabajado anteriormente. Una vez definidos estos dominios, ya podemos trabajar.

Lo que vamos recalcando, es que tenemos que preparar la máquina para que esta calcule bien, pues somos nosotros los que tenemos la capacidad de pensar y no *DERIVE*. Así que podemos "estar tranquilos" los docentes, pues con *DERIVE* podemos ayudar a que los conceptos matemáticos se aclaren y no enseñar matemáticas como si estas fueran recetas de cocina que para realizarlas no necesitas pensar nada, sólo con seguir los pasos uno a uno la comidita sale.

Vamos a resolver ecuaciones. Podemos empezar picando una ecuación de segundo grado, x^2-2x+1, y activamos el comando **Resolver**. Este comando lo tenemos en dos sitios: en el **menú Resolver**, resolveremos algebraicamente, y en la Barra de Herramientas, el botón que tiene una Lupa con un igual en el cristal.

Podemos preparar cómo queremos que *DERIVE* nos dé el resultado. En el menú **Definir**, pinchamos el comando **Modos de operar**, y en este abrimos **Introducción**, y elegimos con la clase de sistema numérico que vamos a trabajar. Repetimos el proceso y activamos el comando **Salida**, y elegimos el formato de los números con que *DERIVE* nos va a contestar, racionales, de 6 dígitos, en sistema decimal, así como el formato de las expresiones.

Repetimos el proceso una vez más, **Definir**, **Modos de operar**, y esta activamos **Simplificación**. Se puede elegir el formato de los ángulos, la precisión, el número de decimales, la rama compleja, el sentido de las transformaciones.

También en **Definir**, podemos darle valor determinado a una variable y definir el dominio de una variable con las dos primeras órdenes.

PRÁCTICAS CON *DERIVE*

6 HOJAS DE TRABAJO CON *DERIVE* PARA WINDOWS

INTRODUCCIÓN:

Estas Hojas de trabajo han sido realizadas por José María Arias Cabezas de I.E.S Larra – Universidad Autónoma – Madrid.

Las he encontrado publicadas en el nº 2 de la revista Delta, de La asociación de usuarios de *DERIVE* de España.

Mi trabajo ha consistido en adaptarlas a *DERIVE* para Windows, y las he trabajado en el aula de Informática con los alumnos de 2º BUP del Instituto de Mislata, en el último trimestre de la asignatura Informática, durante el curso 1997/98

NIVEL

3º ESO

OBJETIVOS

Aprender a utilizar *DERIVE* mientras trabajamos cada uno de los siguientes contenidos:

1. **Números y operaciones.**

I. Resolución de operaciones (+, -, *, /, a^n, √) combinadas y con paréntesis de números naturales, enteros, racionales e irracionales.

II. Descomposición factorial de números enteros y expresiones algebraicas.

III. Desarrollo de productos de potencias de números enteros y expresiones algebraicas.

IV. Búsqueda del M.C.D y el m.c.m y el siguiente número primo de cualquier número.

V. Operaciones exactas dando la solución como número entero, racional o irracional.

VI. Aproximación a un número racional o irracional hasta más de 1.000 cifras, dando el resultado en notación decimal, racional o científica.

VII. Resolución de ecuaciones y sistemas.

2. **Geometría.**

I. Cálculo de longitudes, áreas y volúmenes, introduciendo las operaciones a realizar.

II. Resolución de problemas en los que se conoce una condición y todos los datos menos uno.

3. **Funciones.**

I. Representación gráfica de todo tipo de funciones.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Cada vez que llevemos a los alumnos al aula necesitaremos haber trabajado los conceptos que se van a repasar con *DERIVE*

MATERIAL Y ORGANIZACIÓN

Aula de informática: 1 ordenador con *DERIVE* para Windows por cada dos alumnos.

Duración: 1 sesión para cada hoja de trabajo. Los alumnos más aventajados suelen terminar antes, y pueden dedicarse a "investigar" otras opciones.

DESCRIPCIÓN

Cada una de estas hojas de trabajo consta de tres partes: Experimenta, Aprende y Actividades.

En la primera parte los alumnos realizan los ejercicios que los tienen resueltos en las hojas.

En la segunda parte, Aprende, los alumnos recuerdan lo que han aprendido en la primera con *DERIVE* y lo relacionan con los conceptos aprendidos y trabajados en el aula.

En la tercera, Actividades, tienen que trabajar ya "solitos" poniendo a prueba lo que han aprendido en las dos partes anteriores.

HOJA DE TRABAJO 1: DIVISIBILIDAD, NÚMEROS NATURALES, ENTEROS Y POTENCIAS.

EXPERIMENTA

Para ejecutar una función, pulsa la letra de la función que está en mayúscula.

1.Calcula 7 + 14 : 2 – 6 / 2 + 5 (8 - 6)

Editar expresión:7 + 14 / 2 – 6 / 2 + 5 * (8 - 6))=↵

21

2. Calcula 2^4 . 3 . 5^2 . 7

Editar expresión: 2 ^ 4 * 3 * 5^2 * 7

Expandir/ Expandir 8400

3. Halla la descomposición factorial de 720

Editar expresión: 720 ↵

Factorizar/ Factorizar $2^4 3^2 5$

4. Halla el M.C.D de 2100 y 360

Editar expresión: gcd(2100, 360)= ↵

60

5. Halla el m.c.m. de 2100 y 360

Editar expresión : lcm(2100, 360)= ↵

12600

6. Halla el primer número primo superior a 1000.

Editar expresión: next_prime(1000)= ↵

1009

APRENDE

Sumar **a+ b**

Restar **a– b**

Multiplicar **a * b**

Dividir **a / b**

Potencia **a^ b**

Las órdenes del menú Álgebra que utilizamos para la teoría de números son:

Editar expresión Introduce una expresión. Si la introducimos con = la realiza.

Expandir Desarrolla una expresión

Factorizar Factoriza una expresión

Simplificar Simplifica una expresión.

Las órdenes de la teoría de números que tiene DERIVE son:

gcd(a, b, ...) M.C.D

lcm(a, b, ...) m.c.m

next_prime(a) Primo siguiente al nº **a**

ACTIVIDADES

1. Efectúa las siguientes operaciones:

a) $-4 - 3 . 5 + 12 : 3 - 2 (5 - 2)$

b) $(-2)^3 + 3 (4 - 18 : 6) (6 - 2 -(-5)^2 . 4)$

c) $2 - 3 (5 - 4 (4 - 6)) + 8^2 : 4$

d) $6 : 2 . 3 + 5 . 2 . 3^5 - 6 (5 - 2 + 4 - 3^4 . 2)$

2. Halla la descomposición factorial de los siguientes números y di cuáles son primos:

a) 52

b) 53

c) 1260

d) 960

e) 500

f) 503

3. Halla el M.C.D de:

a) 32 y 24

b) 100 y 120

c) 96 y 64

d) 12, 18 y 24

e) 1750 y 1000

f) 800 y 3500

g) 270 y 2268

h) 990, 1260 y 960.

4. Halla el m.c.m de:

a) 32 y 24

b) 100 y 120

c) 96 y 64

d) 12, 18 y 24

e) 1750 y 1000

f) 800 y 3500

g) 270 y 2268

h) 990, 1260 y 960

5. Halla el primer número primo siguiente a:

a) 10

b) 20

c) 50

d) 100

e) 700

f) 1000

g) 5555

h) 1000000

HOJA DE TRABAJO 2: LOS NÚMEROS RACIONALES

EXPERIMENTA

Comprueba que *DERIVE* está en Notación Racional y en Precisión Exacta

Definir/ Modos de operar / Salida / Notación Racional..

Definir/ Modos de operar / Simplificación / Precisión Exacta

1. Simplifica la fracción $\frac{240}{288}$

Editar expresión: 240/288 ↵

Simplificar $\frac{5}{6}$

2. Calcula: $\frac{2}{9}-2+\frac{4}{3}.\frac{7}{5}-\frac{1}{6}:\frac{3}{5}$

Editar expresión: 2/9-2+(4/3)(7/5)-(1/6)/(3/5) ↵

Simplificar– $-\frac{17}{90}$

3. Calcula el valor de $\frac{31}{13}$ con 40 cifras y luego escríbelo como número periódico.

Definir/ Modos de operar / Simplificación / Precisión /Dígitos:40 ↵

Editar expresión: 31/13 ↵

Aproximar

2.384615384615384615384615384615384615384

Por tanto $\frac{31}{13}$ = 2.384615

APRENDE

Para trabajar con números racionales y que nos dé las soluciones como fracción, tenemos que estar en Notación Racional y Precisión Exacta, para ello elegimos :

Definir/ Modos de operar / Salida / Notación Racional..

Definir/ Modos de operar / Simplificar / Precisión Exacta

Cuando aproximamos un resultado, lo da con las cifras que tengamos en Dígitos. Por defecto tiene 6, para modificarlos elegimos:

Definir/ Modos de operar / Simplificar / Precisión / Dígitos : 40

En el número de dígitos le podemos poner más de 1000, pero tarda más tiempo en hacerlo.

Para simplificar una fracción o realizarla y simplificarla, la introducimos en **Editar expresión** y luego elegimos **Simplificar**. Si queremos que nos dé el resultado como decimal, elegimos **Aproximar**.

Para obtener la expresión decimal de una fracción, ponemos un número grande de Dígitos y buscamos el periodo, pues sabemos que un número racional o es decimal exacto o es periódico.

ACTIVIDADES

1. Simplifica las fracciones:

a) $\frac{1200}{210}$ b) $\frac{180}{8100}$ c) $\frac{800}{640}$ d) $\frac{1024}{1280}$ e) $\frac{360000}{9000000}$ f) $\frac{2048}{10000}$

2. Calcula:

a) $4-\frac{11}{2}.\frac{7}{3}$

b) $\frac{1}{3}-4\left(\frac{2}{6}+\frac{5}{9}\right)$

c) $1-\frac{1}{2}.\frac{1}{3}$

d) $\frac{3}{4}-7:\frac{49}{8}$

e) $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}:\frac{1}{8}$

f) $-\frac{1}{2}-\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{12}\right)$

g) $\frac{18}{5}:6$

h) $-3.\dfrac{20}{6}$ i) $\dfrac{20}{6}:3$

3. Escribe la expresión decimal de las siguientes fracciones y clasifícalas como números enteros, decimales exactos, periódicos puros y mixtos.

a) $\dfrac{7}{30}$

b) $\dfrac{5}{24}$

c) $\dfrac{8}{9}$

d) $\dfrac{24}{6}$

e) $\dfrac{3}{8}$

f) $\dfrac{6}{13}$

g) $\dfrac{13}{33}$

h) $\dfrac{15}{11}$

i) $\dfrac{23}{7}$

HOJA DE TRABAJO 3: LOS NÚMEROS REALES

EXPERIMENTA

Comprueba que *DERIVE* está en Notación Racional y en Precisión Exacta

Definir/ Modos de operar / Salida / Notación Racional..

Definir/ Modos de operar / Simplificación / Precisión Exacta

Para escribir la raíz cuadrada y los números ***pi, e*** *pulsamos en el teclado:*

√ = Ctrl Q   π = Ctrl P   ê = Ctrl e

Para calcular cualquier raíz que no sea cuadrada, tenemos que escribirla como potencia.

1. Calcula $\sqrt{2}$ con 40 decimales y mira si es periódico.

Definir/ Modos de operar / Simplificar / Precisión Dígitos: 40 ↵

Editar expresión: √2 ↵   √ = Ctrl Q

Aproximar

1.414213562373095048801688724209698078569

Como vemos no es periódico.

2. Calcula $\sqrt[5]{7}$ con 40 decimales y mira si es periódico.

Editar expresión: 7^(1/5) ↵

Aproximar

1.475773152439538215218673632763124631330

Como vemos no es periódico.

3. Calcula $\sqrt{12} + \sqrt{75}$

Editar expresión: √12 + √75 ↵

$\sqrt{12} + \sqrt{75}=7\sqrt{3}$

4. Racionaliza $\frac{5}{\sqrt{3}}$

Editar expresión: 5/√3 ↵

Simplificar

$$\frac{5\sqrt{3}}{3}$$

5. Calcular en notación científica 2’5. 10^{9} : 3’2. 10^{-5}

Definir/ Modos de operar / Salida / Notación Racional Científica ↵

Editar expresión: 2.5 10^9/(3.2 10^(-5))= ↵

2.5 10^9/(3.2 10^(-5))= 7.8125 . 10^{13}

APRENDE

Para trabajar con números reales y que nos dé las soluciones como radicales, tenemos que estar en Notación Racional y Precisión Exacto, para ello elegimos:

Definir/ Modos de operar / Salida / Notación Racional..

Definir/ Modos de operar / Simplificación / Precisión Exacta

Si el resultado lo queremos en Notación científica, elegimos

Definir/ Modos de operar / Salida / Notación Racional Científica

Cuando aproximamos un resultado, nos lo da con las cifras que tengamos en Dígitos. Por defecto tiene 6, y para modificarlos elegimos:

Definir/ Modos de operar / Simplificación / Precisión Dígitos : 40

Para efectuar una operación con radicales, la introducimos en **Editar** y luego elegimos **Simplificar (=)**. Si queremos que nos dé el resultado como decimal, elegimos **Aproximar**.

ACTIVIDADES

1. Calcula con 40 decimales y mira a ver si son periódicos los siguientes números.

a) $\sqrt{3}$

b) $\sqrt{225}$

c) $\sqrt{345.67}$

d) e

e) π

f) Número de oro o número aúreo: $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

2. Calcula

a) $\sqrt{5}+3\sqrt{45}-\sqrt{20}$ b) $\sqrt{x}+2\sqrt{25x}-4\sqrt{9x}$ c) $\sqrt{10}.\ \sqrt{20}$ d) $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{72}}$

3. Racionaliza:

a) $\dfrac{2}{\sqrt{6}}$

b) $\dfrac{5}{2-\sqrt{3}}$

c) $\dfrac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

4. Calcula en notación científica:

a) $3{,}45 . 10^{5} + 6{,}27 . 10^{6}$

b) $7{,}44 . 10^{-8} . 4{,}2 . 10^{21}$

c) $1{,}28 . 10^{15} : 9{,}53 . 10^{34}$

HOJA DE TRABAJO 4: ECUACIONES Y SISTEMAS

EXPERIMENTA

Comprueba que *DERIVE* está en Notación Racional y en Precisión Exacta.

Definir/ Modos de operar / Salida / Notación Racional..

Definir/ Modos de operar / Simplificación / Precisión Exacta

1. Resuelve la ecuación: $\frac{x-1}{2} - \frac{5x-7}{6} = 2x-5$

Editar expresión: (x-1) / 2 - (5x-7) / 6 = 2x-5 ↵

Resolver

x=17/7

Aproximar

x = 2.42857

2. Resuelve el sistema: $\begin{cases} 2x - 3y = 7 \\ x + 5y = 23 \end{cases}$

Editar vector: 2 componentes [2x-3y=7,x+5y=23] ↵

Resolver

[x=8, y=3]

APRENDE

Para que nos dé las soluciones como fracciones tenemos que estar en Notación Racional y Precisión Exacta. Para ello elegimos :

Definir/ Modos de operar / Salida / Notación Racional..

Definir/ Modos de operar / Simplificación / Precisión Exacta

Si queremos que nos dé el resultado como decimal, elegimos **Aproximar**.

Resolución de una ecuación.

Introducimos la ecuación en **Editar expresión** y para resolverla elegimos el comando **Resolver**.

Resolución de sistemas lineales.

Escribimos las ecuaciones entre corchetes, separadas por comas, y elegimos **Resolver**. Las ecuaciones las podemos escribir desde Editar Vector, para tener así los corchetes.

Se pueden presentar tres casos:

a) Que tenga una solución.

b) Que no tenga una solución: y no lo resuelve.

c) Que tenga infinitas soluciones: Da la solución en función de parámetros @ 1 .

ACTIVIDADES

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) 5. (x-2) – 3. (2x-4) = 6 (x-1)

b) $\frac{x}{2} + \frac{2x}{3} - \frac{5x}{6} = 7x + 4$

2. Resuelve las ecuaciones:

a) $\frac{5x-1}{2} - \frac{4x+2}{3} = \frac{4x+3}{2}$

c) $\frac{2x-1}{2} - 2(x-3) = 5 - \frac{7x}{2}$

b) $\frac{x+1}{5} + \frac{x-2}{6} = 1$

d) $\frac{x-5}{3} - \frac{2x-3}{12} = \frac{5-x}{4} - \frac{x}{3}$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) (x + 3). (x – 5) . (3x – 1) = 0

b) x (-x + 2) (x – 6) (5x – 7) = 0

4. Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} x - 4y = -14 \\ 2x + 5y = 11 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - 3y = 2 \end{cases}$

5. Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -4x + 6y = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - 2y = -3 \\ -2x + 4y = 6 \end{cases}$

Plantea la ecuación/sistema correspondiente y resuelve con DERIVE

6. Halla la edad de Diofanto sabiendo que:

a) Su hermosa infancia duró la sexta parte de su vida.

b) En la duodécima parte de su vida le salió barba.

c) La séptima parte de su vida estuvo ocupada por un matrimonio estéril.

d) Transcurrido un quinquenio, nació su primogénito.

e) Su hijo vivió la mitad que su padre.

f) El padre encuentra la muerte 4 años más tarde que su hijo.

7. Calcula las dimensiones de un rectángulo cuyo perímetro es 80 m. y la altura mide 2/3 de la base.

HOJA DE TRABAJO 5: CÁLCULOS EN GEOMETRÍA

EXPERIMENTA

Comprueba que *DERIVE* está en Notación Mixta y en PrecisiónMixta.

Definir / Modos de operar / Salida / Notación Mixta

Definir / Modos de operar / Simplificación / Precisión Mixta

Para elevar a una potencia, se escribe el acento circunflejo ^; al pulsar la tecla correspondiente no sale, pero al escribir el siguiente carácter, obtenemos de una vez los dos caracteres.

Para obtener el número π, pulsamos **Ctrl P**.

Para obtener la raíz cuadrada, pulsamos **Ctrl Q**.

1. Halla el volumen de una esfera conociendo el radio R=23,4 m.

La fórmula es $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

Editar expresión: V=4/3 π 23,4^3 ↵

Aproximar

v =53670.5

2. De un triángulo rectángulo conocemos la hipotenusa a = 7.23 m y un cateto b=5.47 m. Calcula el cateto c.

El Teorema de Pitágoras: $a^2 = b^2 + c^2$

Editar expresión: 7.23^2=5.47^2+c^2 ↵

Resolver

c = 4.72779

c = -4.72779 no vale

3. Calcula el radio de un círculo, sabiendo que el área es 57.86 cm^2.

La fórmula del área es: $A = \pi . R^2$

Editar expresión: 57.86=π* R^2 ↵

Resolver

r = 4.29155

r = -4.29155 no vale

APRENDE

En cálculos geométricos tenemos dos clases de problemas:

a) **Directos:** Nos dan los datos de una fórmula y nos piden el valor. Se resuelven sustituyendo en la fórmula los datos y eligiendo **Aproximar**.

b) **Inversos:** Nos dan el valor de la fórmula y el resto de los datos menos uno. Se resuelven sustituyendo en la fórmula los datos conocidos y eligiendo **Resolver**.

En los problemas tendremos que interpretar los resultados y eliminar los que no valen; por ejemplo, un radio negativo.

ACTIVIDADES

1. Calcula el área y el volumen de un icosaedro, sabiendo que la arista mide a=5 cm. Fórmulas: $A = 5a^2\sqrt{3}$ $V=\frac{5a^3}{12}(3+\sqrt{5})$

2. Halla el número de lados de un polígono convexo sabiendo que un ángulo interior mide 144°. Fórmula: $A = \frac{180(n-2)}{n}$

3. Calcula el radio de una circunferencia cuya longitud es 36 m.

4. Halla el número de lados de un polígono convexo de 54 diagonales. Fórmula: $d = \frac{n(n-3)}{2}$.

5. Calcula h sabiendo que: $\frac{h}{125} = \frac{1.3}{0.8}$

6. Halla la hipotenusa de un triángulo rectángulo sabiendo que los catetos miden 5 cm y 7 cm respectivamente.

7. Halla la altura de un triángulo equilátero cuyo lado mide 8 m.

8. Calcula la arista de un cubo de volumen 7 cm^3.

9. Calcula la superficie de un cono sabiendo que el radio de la base mide 5 m y la generatriz 13 m. ($A=\pi.R^2+ 2\pi RG$).

10. Calcula el radio de un cilindro sabiendo que el volumen es 5 cm^3 y la altura mide 2 cm. ($V =\pi.R^2H$)

HOJA DE TRABAJO 6: REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES.

EXPERIMENTA

DERIVE tiene, además de la pantalla del Álgebra, en la que has estado trabajando, dos ventanas más, son las ventanas gráficas de *DERIVE*: una en 2D y otra en 3D.Para activarlas podemos hacerlo desde los botones: son los dos que están en el último bloque; los llamamos Representar, o desde el menú Ventana y elegiremos la pantalla gráfica que nos convenga.

Vamos a trabajar en esta hoja la ventana gráfica 2D .

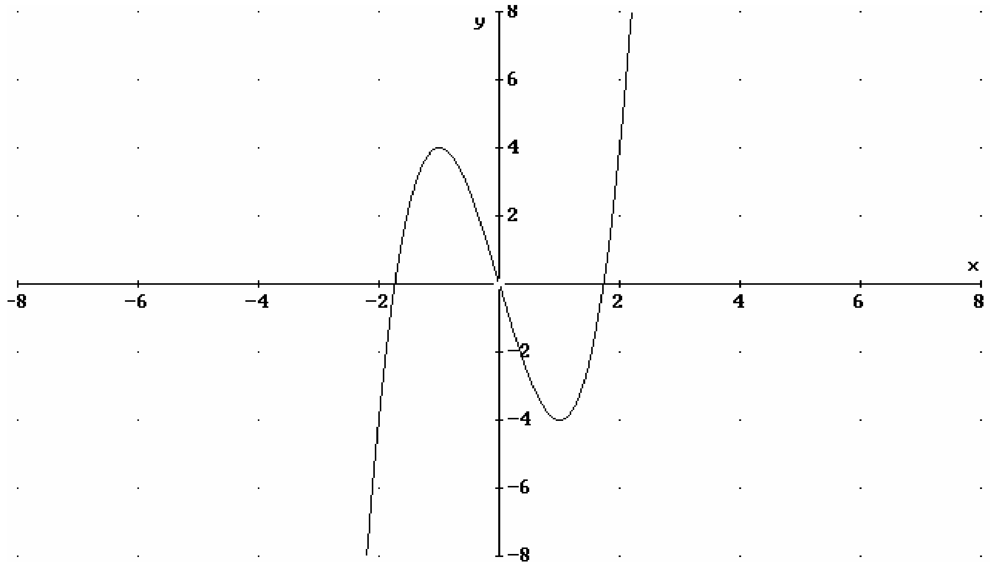
Para ello tendremos que escribir la expresión en la ventana algebraica, y una vez escrita y resaltada dibujarla en la ventana 2D.

1. Representa la función $2x^3$-6x y de si es continua, simétrica o periódica. Halla los máximos y mínimos relativos. ¿Qué clase de función es?

Editar expresión: y=2x^3-6x Si↵

Representar

Menú Ventana: Mosaico vertical



Nos aparece la ventana gráfica al lado de la ventana algebraica. Podemos sacar conclusiones de la gráfica:

- Es una función continua
- Es simétrica respecto al origen
- No es periódica
- Tiene un máximo relativo en M(-1, 5)
- Tiene un mínimo relativo en m(1, -5)
- Es una función cúbica.

2. Representa el siguiente par de funciones y, viendo las gráficas, halla los puntos de corte. ¿Qué clase de funciones son? a) y = 4x, b) y = 4/x

Desde ventana gráfica: Menú Editar: Borrar gráfica: Todas ↲

Ventana Álgebra ↲

Editar expresión: y = 4x ↲

Representar ↲

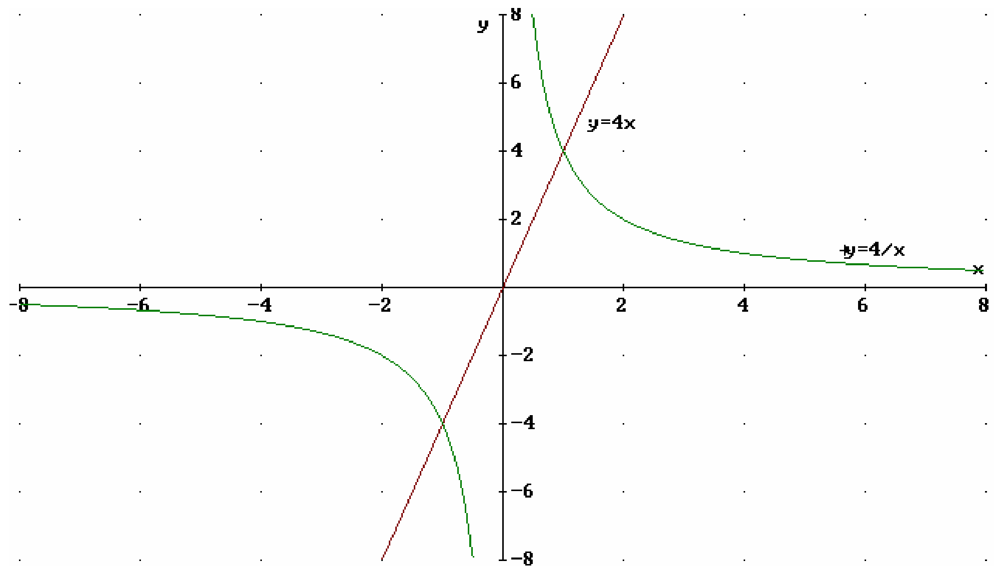
Representar ↲

Ventana Álgebra ↲

Editar expresión: y = 4/x ↲

Representar ↲

Representar ↲



a) La función es una recta que pasa por el origen, es una función lineal o de proporcionalidad directa
b) Tenemos una hipérbola, es una función de proporcionalidad inversa.

Las dos funciones se cortan en los puntos: A(-1, -2) y B(1, 2).

APRENDE

Representación de funciones

Escribimos la función en la opción **Álgebra / Editar expresión**, luego elegimos la ventana **2D** para **representar**, **representamos** y decidimos donde queremos ver la representación, mosaico vertical, horizontal, en cascada, ...

Tenemos que comprobar que tenemos el sistema de coordenadas rectangulares y no polares**: Menú : Opciones: Sistema de coordenadas : Rectangulares**.

También podemos comprobar en Opciones, los ejes, el cursor, la rejilla, etc.

Borramos las gráficas en 2D: **Menú Editar: Borrar gráfica: Todas ↵**

Para usar el **Zoom** con *DERIVE***: F9 = amplia, F10 = reduce**, ó bien los botones con flechas indicativas que aparecen en la ventana 2D.

Floor (x) es la función parte entera de x.

ACTIVIDADES

1.Representa las siguientes funciones, y para cada una de ellas, completa los apartados de la solución.

$y = x^2-4$; $y = \cos x$; $y = \text{floor}(x)$; $y = \dfrac{12}{x}$; $y = \dfrac{8}{x^2+1}$; $y = \dfrac{2}{x^2-1}$

2.Representa los siguientes pares de funciones y, viendo el dibujo, calcula los puntos de corte entre ellas y de cada una. Di de qué tipo es y calcula los puntos de corte con los ejes.

a) $\begin{cases} x - y = -1 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = 2x \\ y = \dfrac{-4}{x} + 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = \dfrac{2}{3}x \\ y = \dfrac{6}{x} \end{cases}$

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO. RESOLUCIONES ALGEBRAICAS Y RESOLUCIONES GRÁFICAS.

NIVEL

3º/4º ESO

OBJETIVOS

- Planteamiento de problemas de ecuaciones de segundo grado.
- Resolución algebraica de ecuaciones con *DERIVE*, trabajando muchos de los comandos de *DERIVE.*
- Resolución gráfica con *DERIVE*. La parábola. Interpretación de la gráfica.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

- Ecuaciones de segundo grado. Resolución algebraica y resolución gráfica.

MATERIAL Y ORGANIZACIÓN

Esta actividad la dividimos en tres sesiones.

1. Planteamiento de problemas
2. Resolución algebraica
3. Resolución gráfica. Parábola.

La primera sesión la podemos realizar en el aula o en casa, pues se trata de plantear 5 problemas de ecuaciones de segundo grado. Para realizar la segunda y la tercera sesión necesitamos un aula de informática con un ordenador para cada dos alumnos.

DESCRIPCIÓN

Se necesita conocer un poco de *DERIVE* antes de empezar cada una de las sesiones en el aula de informática. Quizá se puede invertir más tiempo iniciando a *DERIVE* en la segunda actividad, pues es más corta de trabajar. En la segunda podemos explicar la ventana gráfica y el paso de ésta a la ventana algebraica y viceversa, pero como ya se tiene conocimientos de *DERIVE*, el aprendizaje es más rápido.

1.- PLANTEAMIENTO DE PROBLEMAS DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO.

El objetivo de este primer apartado es el planteamiento, mediante ecuaciones de segundo grado, de los siguientes problemas de aritmética, geometría o de la vida de todos los días. Hay que elegir las incógnitas convenientemente. No se pide resolver ninguno de estos problemas.

Problema 1

Buscar dos números conociendo su suma S y su producto P:

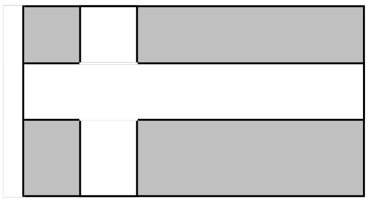
a) $S = 3$ y $P = -10$

b) $S = 200$ y $P = 9999$

c) $S = \dfrac{a^2+1}{a}$ y $P = 1$ $(a \in \Re^*)$

Problema 2

La cruz



La bandera danesa está formada por una cruz blanca sobre fondo gris. ¿Cuál debe ser la longitud de las bandas para que el área de la superficie blanca sea igual al área de la superficie gris?

a) En un primer caso, suponemos que la bandera tiene por dimensiones 1,50x1m.

b) En un segundo caso, suponemos que las dimensiones de la bandera son L y l.

Problema 3

Un padre y su hijo trabajan con el mismo empresario. El padre recibe 500 francos después de cierto número de días trabajados, el hijo que ha trabajado 5 días menos tan sólo recibe 240 francos. Encontrar el número de días de trabajo y el salario por día de cada uno, sabiendo que el salario por día del hijo es inferior en 8 francos al del padre.

Problema 4

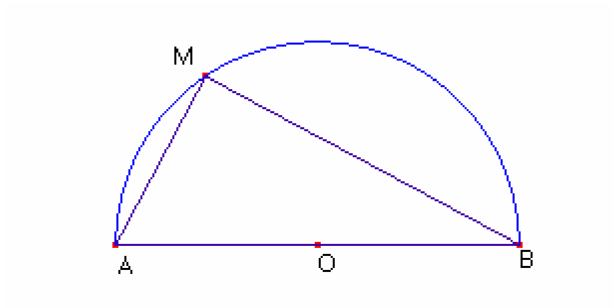
En el baño

Una bañera puede contener 140 litros. El grifo de agua caliente suministra 15 litros por minuto. Utilizando sólo el grifo de agua fría (1er caso), el llenado de la bañera cuesta tres minutos más que con los dos grifos (2º caso).

Calcular el suministro d del grifo del agua fría y el tiempo de llenado en cada uno de los dos casos.

Problema 5

El semicírculo de diámetro [AB] tiene 7,5 cm de radio. El triángulo AMB tiene por perímetro 36 cm. Determinar las longitudes de los lados del triángulo AMB.



2.- RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON LA AYUDA DE *DERIVE*

¿Qué comandos vamos a utilizar con *DERIVE*?

En el menú EDITAR:

Editar expresión	Para escribir una expresión

En el menú SIMPLIFICAR:

Expandir	Para desarrollar una expresión ó subexpresión
Factorizar	Para factorizar una expresión ó subexpresión.
Simplificar	Para simplificar una expresión.

En el menú RESOLVER:

Resolver	Para resolver una ecuación

En el menú EDICIÓN:

Suprimir	Para eliminar la expresión seleccionada.
Mover	Para cambiar las expresiones de sitio
Renumerar	Para volver a numerar las expresiones

¿Qué teclas de funciones vamos a utilizar?

F3: para pegar la expresión seleccionada.

1. Resuelve las ecuaciones del apartado anterior. Comprueba qué resultados propuestos por *DERIVE* son buenas soluciones para los problemas. Redacta una solución para cada uno.
2. ¿Qué observas en estas ecuaciones?

¿Cuál es su forma general?

Introduce esta forma general en *DERIVE*.

Busca las soluciones cuando existan. Escribe una condición de existencia de estas soluciones. Calcula la suma y el producto.

3.- LECTURAS GRÁFICAS. PARÁBOLAS Y ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO.

¿Qué comandos vamos a utilizar con *DERIVE*?

En el menú EDITAR:

Editar expresión Para escribir una expresión

En el menú SIMPLIFICAR:

Expandir Para desarrollar una expresión ó subexpresión

Sustituir Para sustituir variables

En el menú VENTANA:

Ventana 2D: Para pasar a la pantalla 2D

Cascada, Mosaico vertical, Mosaico horizontal Para situar las ventanas algebraica y 2D.

En la Ventana 2D:

Representar Para representar la función que tenemos resaltada. También podemos representar dicha función mediante el botón que tiene dibujado unos ejes coordenados con una función dibujada.

Podemos utilizar en esta ventana el botón que tiene dibujado como un listado de expresiones para pasar a la ventana del álgebra, y para pasar de la ventana del álgebra a la ventana 2D podemos utilizar el botón de la ventana algebraica que lleva dibujado los ejes coordenados. Si tenemos las dos ventanas en forma de mosaico vertical u horizontal, o en cascada, podemos pasar de una a otra con el ratón.

- Introduce en *DERIVE* una función $y = ax^2+bx+c$
- Sustituye los coeficientes a, b y c. Por ejemplo a=1, b=2, c=1.
- Crear la ventana 2D, y dejar ambas ventanas en cascad, mosaico vertical o mosaico horizontal.
- Dibuja la parábola.
- En la ventana algebraica modificar los coeficientes a, b y c y dibujar la nueva parábola.
- Repite el proceso.

Trabajo para las parejas:

1) Cada alumna/o construye un trinomio teniendo las raíces enteras. Por ejemplo: 2 y –4 con a = -3. Tenemos entonces: f(x) = -3 (x-2) (x+4).

Con *DERIVE* ó a mano, desarrolla la función: Expandir/: $f(x) = -3x^2-6x+24$.

Modifica los coeficientes a, b y c en la expresión anteriormente introducida en *DERIVE* y dibuja la parábola obtenida.

2) el otro alumno debe entonces encontrar la ecuación de la parábola que está en la ventana 2D.
3) Se repite la experiencia algunas veces más, con trinomios teniendo un discriminante estrictamente positivo (raíces enteras), nulo o estrictamente negativo.

¿Qué información tenemos que extraer de la gráfica?

- Lee el signo del discriminante
- Lee el signo de a
- Lee las raíces si es que existen
- Lee el valor de c
- Deduce de las raíces la abcisa del vértice de la parábola
- Lee el signo del trinomio
- Deduce del discriminante la ordenada del vértice.

¿Se puede deducir más cosas?

Trabajad con las siguientes parábolas:

$y = -x^2 + 7x – 1$

$y = 3x^2 + 7x + 4$

$y = -x^2 – x – 1$

$y = x^2 – 2x – 15$.

SUCESIONES DE NÚMEROS REALES.

NIVEL

2º curso de Bachiller

OBJETIVOS

- Representar gráficamente sucesiones de números reales para tener una “intuición visual” de algunas propiedades de la sucesión: convergencia (grado de horizontalidad), monotonía, acotación,...
- Comprobar esas mismas propiedades en sus aspectos manipulativos (cálculos)

CONOCIMIENTOS PREVIOS

- Concepto de sucesión de números reales.

MATERIAL Y ORGANIZACIÓN

Aula de informática, con un ordenador con *DERIVE* para windows, por cada dos alumnos.

Duración: 1 hora. (se puede repetir la práctica para afianzar conceptos)

DESCRIPCIÓN

Se puede aprovechar esta práctica para trabajar todos los conceptos sin necesidad de haberlos trabajado con anterioridad en el aula. Esto es posible siempre que tengamos a disposición nuestra una aula con ordenadores y *DERIVE* , y la podamos utilizar como el aula de nuestra asignatura.

MATERIAL DE TRABAJO

Problema 1:

Sea la sucesión de término general $\mathbf{a_n = (n-1)/(n+3)}$

a) Obtén el valor (exacto y aproximado) de a_5, a_{100}, a_{1000}.

b) ¿Cuál es la expresión de a_{n+1}?

c) Compara a_{n+1} con a_n y deduce de ahí si la sucesión es creciente, decreciente ó ninguna de las dos cosas.

d) ¿Cuántos términos de la sucesión están en el intervalo]0,999, 1,2[?.¿Y en el intervalo]0,99999, 1,01[?. ¿Y en el intervalo]1-h, 1+h[(h>0)?

e) ¿Cuál es el límite de esta sucesión?

f) Representa gráficamente los 50 primeros términos de esta sucesión.

¿Cómo resolverlo con *DERIVE*?

Una vez abierto el programa, preparamos la pantalla para poder ver las ventanas algebraica y gráfica a la vez. Para ello pinchamos en el **menú ventana**, **Nueva ventana 2D**, y otra vez en el **menú ventana**, **Mosaico vertical**. Para activar cada ventana, basta con pinchar con el ratón la que queremos utilizar.

En la ventana del álgebra:

Creamos la sucesión: en el **menú Editar / Editar expresión** escribimos: a(n):=(n-1)/(n+3).

De esta forma, desde **Editar expresión**, podemos ir hallando cada uno de los términos que queramos con sólo escribir, por ejemplo, a(60)=, y *DERIVE* nos dará este valor.

Para estudiar la monotonía de la sucesión, tenemos que comparar a_{n+1} y a_n. Desde Editar expresión, tecleamos a(n+1)-a(n)=, y *DERIVE* nos resuelve esta operación. Somos nosotros los que, a la vista del resultado, decidimos si la sucesión crece, decrece,... .

Para ir acotando la sucesión, tenemos que resolver inecuaciones del tipo a(n)>0,999. Para esto teclearemos la inecuación en el **menú Editar/Editar ecuaciones**, y una vez introducida en el pantalla algebraica, activaremos la orden **Resolver**. En este ejemplo, a(n)>0,999, *DERIVE* nos contesta [n<-3, n>3997]. Nosotros tenemos que decidir qué solución es la “buena” para nuestro ejercicio. El resto de las acotaciones se realizan de forma análoga.

Para que *DERIVE* nos calcule un límite:

- Tenemos que resaltar la expresión de la que queremos calcular el límite.
- Activamos la orden **Calcular / límite** de la ventana algebraica
- Se nos abre una ventana donde se pregunta la variable, hacia dónde tiende ésta, y si tiende hacia la derecha, izquierda, o en ambas direcciones.
- Elegimos las opciones que queramos y pulsamos Si o Simplificar. Si pulsamos Simplificar, directamente obtenemos en la ventana algebraica el resultado del límite. Si pulsamos Si, nos aparece en la ventana algebraica la expresión, $\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n+3}$.

Para representar la sucesión, en la ventana algebraica creamos un vector [n, $\frac{n-1}{n+3}$], y pasamos a la ventana gráfica. Pulsamos la orden **Representar**, e inmediatamente nos aparece una ventana en la que se pregunta:

- Valor mínimo y valor máximo del eje de abcisas
- Modo de representar: continuo o puntos
- Tamaño de los puntos
- Número de puntos que se quiere representar.

Elegimos cada uno de estos puntos según convenga y pulsamos la orden Si. *DERIVE* nos dibuja tantos términos de la sucesión como nosotros queramos. A lo mejor nos hace falta pulsar el comando del zoom sobre el eje de abcisas.

Una vez “pintada” la sucesión, podemos comprobar visualmente las propiedades de esta: la monotonía, el límite (según el grado de horizontalidad), las cotas, ... Quizá sea más “educativo” saber expresar las propiedades de la sucesión a partir de la gráfica, que saber darle al botoncito para que *DERIVE* nos calcule el límite. Pienso que esto debe ser a posteriori, una vez hemos leído la gráfica, para comprobar que nuestra lectura ha sido la adecuada.

Problema 2:

Sea la sucesión definida por $a_n = \dfrac{3n+4}{n+1}$

a. Halla los términos a_1, a_{10}, a_{356}, a_{1000}.

b. ¿Qué parece que está pasando?

c. Demuestra que la sucesión es estrictamente decreciente.

d. Demuestra que para todo natural n se tiene que $a_n \leq 5$.

e. Dibuja la sucesión e intenta "intuir" el límite y las cotas superior e inferior si las tiene.

f. Calcula el límite de la sucesión.

Problema 3:

Sea la sucesión a_n, definida de la siguiente forma: $\begin{cases} a_1 = \sqrt{6} \\ a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} \end{cases}$. Estudia completamente esta sucesión.

¿Cómo resolverlo con *DERIVE*?

Para trabajar las sucesiones definidas por recurrencia de la forma anterior, podemos utilizar la función ITERATE. Esta función es una función interna de *DERIVE*, que funciona de la forma siguiente:

Vamos a hallar el término 20 de esta sucesión. Para ello, desde Editar Expresión, escribiremos: ITERATE($\sqrt{6+x}$, x, √6, 20). *DERIVE* actua de la siguiente forma, empieza a trabajar con la expresión $\sqrt{6+x}$, y la primera x que utiliza es √6. Va repitiendo el proceso hasta 20 veces, utilizando cada vez la x hallada en la expresión última.

Si lo que queremos es conocer muchos términos consecutivos a la vez, trabajaremos con la función VECTOR:

VECTOR([x, ITERATE($\sqrt{6+x}$, x, √6, x).], x, 1, 10)

```
#1:  VECTOR([x, ITERATE(√(6 + x), x, √6, x)], x, 1, 10)

      1                          √(√6 + 6)
      2                       √(√(√6 + 6) + 6)
      3                    √(√(√(√6 + 6) + 6) + 6)
      4                 √(√(√(√(√6 + 6) + 6) + 6) + 6)
#2:   5              √(√(√(√(√(√6 + 6) + 6) + 6) + 6) + 6)
      6           √(√(√(√(√(√(√6 + 6) + 6) + 6) + 6) + 6) + 6)
      7        √(√(√(√(√(√(√(√6 + 6) + 6) + 6) + 6) + 6) + 6) + 6)
      8     √(√(√(√(√(√(√(√(√6 + 6) + 6) + 6) + 6) + 6) + 6) + 6) + 6)
      9   √(√(√(√(√(√(√(√(√(√6 + 6) + 6) + 6) + 6) + 6) + 6) + 6) + 6) + 6)
     10 √(√(√(√(√(√(√(√(√(√(√6 + 6) + 6) + 6) + 6) + 6) + 6) + 6) + 6) + 6) + 6)

      1  2.90680
      2  2.98442
      3  2.99740
      4  2.99956
#3:   5  2.99992
      6    3
      7    3
      8    3
      9    3
     10    3
```

La tercera expresión es una aproximación de la segunda.

Problema 4:

Sea la sucesión a_n, definida de la siguiente forma: $\begin{cases} a_1 = 100 \\ a_n = a_{n-1} - 2n \end{cases}$. Estudia completamente esta sucesión.

¿Cómo resolverlo con *DERIVE*?

Esta es otra forma de expresar una sucesión por recurrencia. Para ello podemos definirla utilizando la función IF:

S(n):=If(n=1, 100, S(n-1)-2n)

Y para observar los 10 primeros términos:

VECTOR(S(n), n, 1, 10)

```
#1:   S(n) := IF(n = 1, 100, S(n - 1) - 2·n)

#2:   S(30) = -828

#3:   VECTOR(S(n), n, 1, 10)

#4:   [100, 96, 90, 82, 72, 60, 46, 30, 12, -8]
```

En estas expresiones tenemos definida la sucesión en la primera; en la segunda tenemos el término 30; en la tercera utilizamos la función vector, y en la cuarta tenemos el resultado de la función vector, es decir, tenemos los diez primeros términos de la sucesión.

NOS ACERCAMOS AL CONCEPTO DE DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO.

NIVEL

2º curso de Bachiller

OBJETIVOS

Acercarnos a la noción de derivada de una función en un punto

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Limite finito en a real.

MATERIAL Y ORGANIZACIÓN

Ordenador con retroproyector o similar, *DERIVE* para Windows; posibilidad de realizar la misma sesión en el aula de Informática, siempre con dos alumnos por ordenador y con una calculadora.

Duración: 1 hora

DESCRIPCIÓN

Este es el primer curso en el que se introduce la derivación. Se trata de enlazar los conceptos de derivada de una función f en un punto x, el concepto de tangente en un punto M(x, f(x)) y el concepto del desarrollo de primer orden alrededor de x de la función f

FICHA TÉCNICA SOBRE EL DESARROLLO DE LA SESIÓN EN EL AULA CON UN ORDENADOR (DEL PROFESOR) Y LAS CALCULADORAS DE LOS ALUMNOS.

Damos una función en la que los alumnos no conozcan, todavía, su comportamiento, por ejemplo: $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{x + 1}$. No conocen pues, el sentido de variación de f, ya que ésta no debe recordarles ninguna función conocida hasta el momento. Antes de estudiar el comportamiento global de f, podemos intentar ver su comportamiento local y después ver qué pasa poco a poco. "Si aumentamos un poquito la variable, ¿qué le pasa a la función?" Podemos empezar estudiando la función cerca de cero.

DERIVE permite visualizar la curva representativa, C, de f, y "zumeando" cierto número de veces sobre el punto A(0, f(0)), apreciamos que la curva "se transforma en una recta" alrededor de A. De ahí la idea de transformar C en una recta cerca de este punto. Por esto se induce a los alumnos a considerar las rectas D_h que pasan por A y por un punto H(h, f(h)) de la curva C, distinto de A.

1ª Conjetura: Según H se acerca a A entonces la recta D_h se acerca a la curva C.

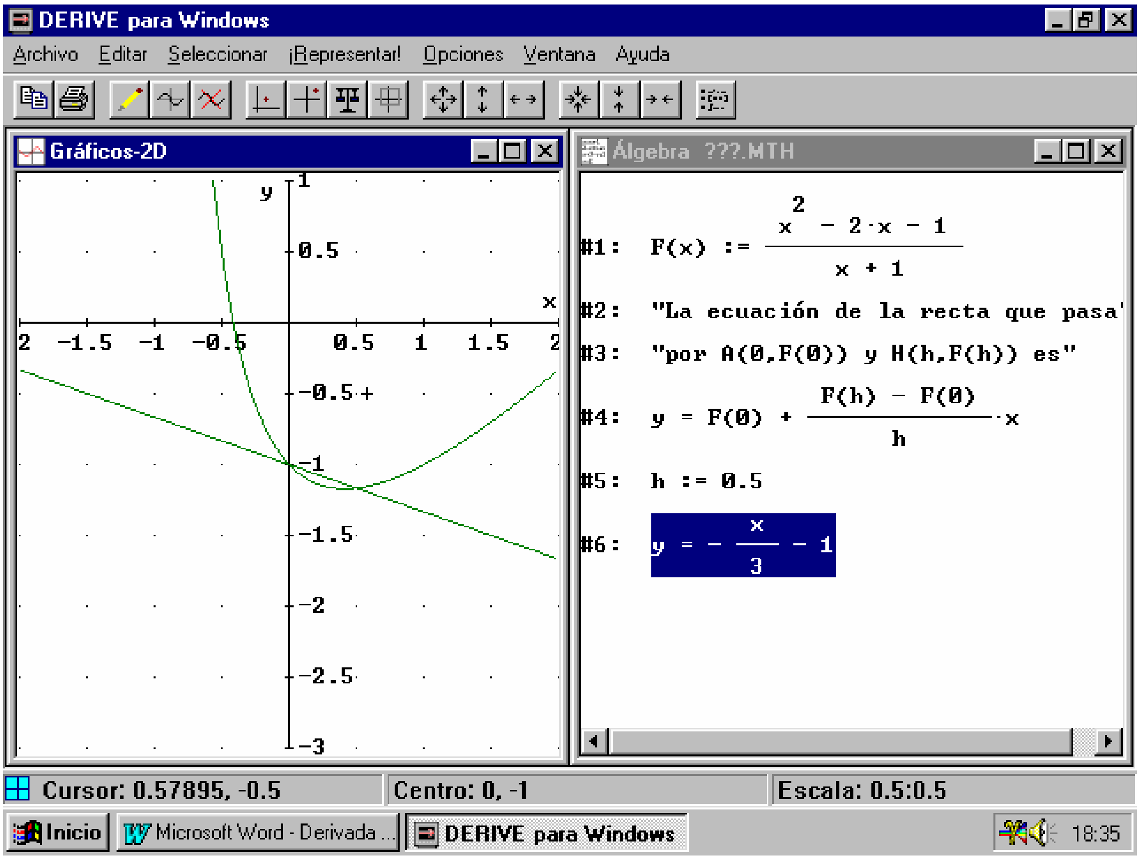
Definimos la recta (AH). Ésta pasa por el punto A(0, f(0)) y su pendiente es $m_h = \frac{f(h) - f(0)}{h - 0}$.

Llevamos a los alumnos a realizar una tabla del siguiente tipo:

h	-0.5	-0,25	-0,1	-0,05	0,5	0,25	0,1	0,05
f(h)								
m_h								
Ecuación de D_h								

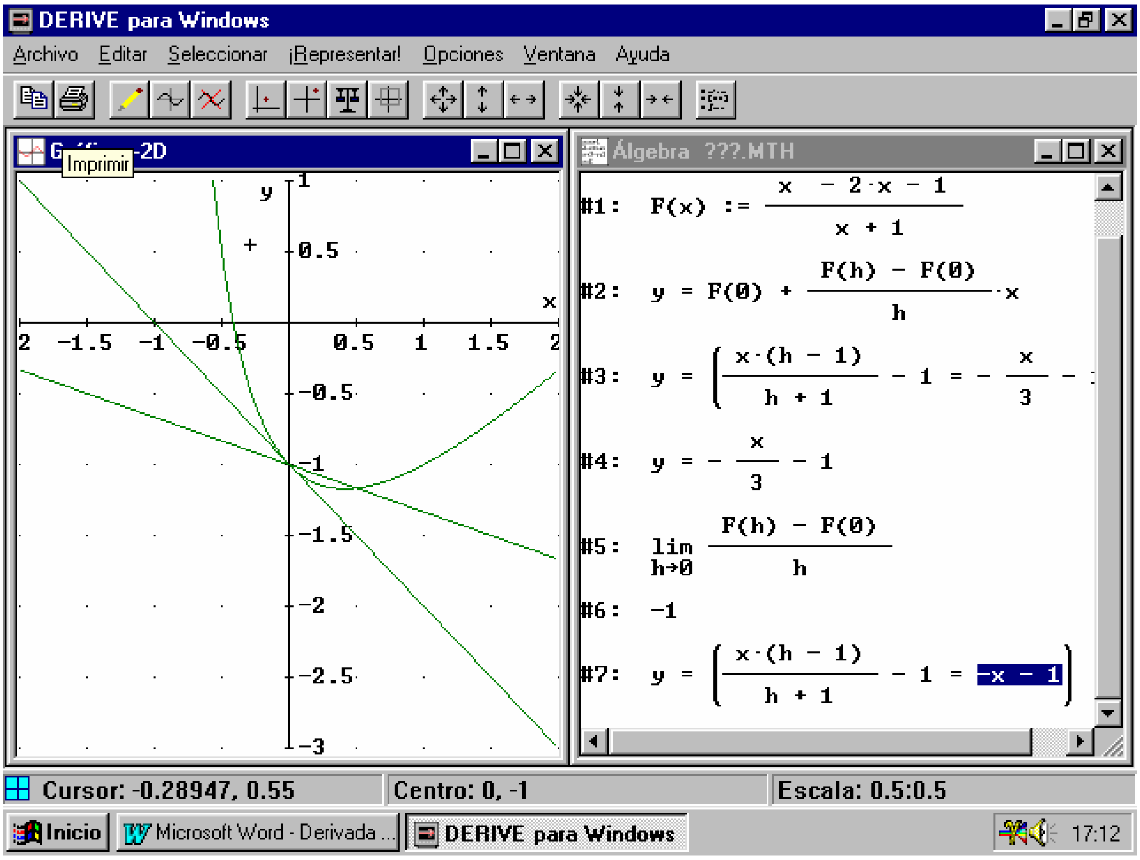
Los alumnos realizan los cálculos con la calculadora, el profesor los realiza con *DERIVE*, mostrando cada recta gráficamente. Utilizando el zoom para ampliar (F9) y centrando en el punto A, la conjetura 1 queda "ilustrada y validada" gráficamente.

Técnica: Para el profesor el trabajo es fácil. Una vez definida la función y la ecuación general de las rectas que pasan por A y H, le vamos dando valores a h, y copiando la expresión de y en el Editor de Expresiones y pulsando Simplificar, *DERIVE* nos escribe la ecuación de la recta correspondiente. También podemos seleccionar h en la ecuación general de la recta, y con la ayuda de la orden **Simplificar/Sustituir subexpresión/Simplificar** cambiar el valor de h.



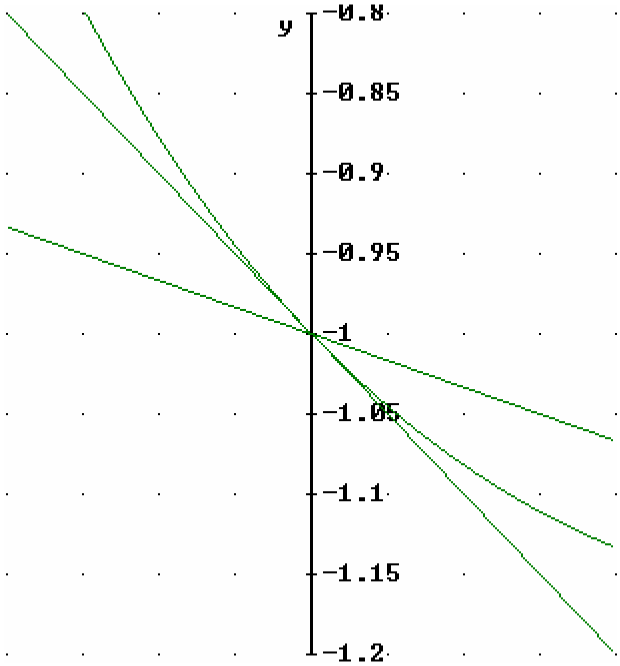
2ª Conjetura: **La mejor recta D será la obtenida tomando como pendiente:**

$$\lim_{h\to 0} m_h$$



Hace falta que los alumnos encuentren este límite. Llegan a que esta recta D tiene por ecuación y = -x-1.

Comparamos la recta D con una de las rectas D_h, haciendo tan grande como necesitemos la gráfica. La 2ª conjetura también queda suficientemente ilustrada de una forma bastante gráfica para los alumnos. Entonces podemos decir que –h-1 es la mejor aproximación afín de f(h) en el punto 0 e ilustrar mediante el cálculo mejorando el valor absoluto de f(h)-(-h-1) por un monomio de grado 2



Este dibujo es la gráfica anterior "zumeada" tres veces más.

FICHA PARA TRABAJAR CON *DERIVE* PARA WINDOWS.

Con este trabajo queremos estudiar el comportamiento de una función f en un entorno cercano de un punto de abcisa a de su dominio de definición.

Sea la función f(x) = $\frac{x^2 - 2x - 1}{x + 1}$ y llamamos C a su representación gráfica en los ejes de coordenadas.

A. Hacemos a = 0.

1. Representamos gráficamente la función f. Para esto:

- **Ventana/Nueva ventana 2D/ Mosaico vertical**
- En la ventana algebraica: **Editar expresión** f(x) := $\frac{x^2 - 2x - 1}{x + 1}$
- En la ventana gráfica: **Representar.**
- Hacemos zoom para ampliar en la gráfica: F9, ó bien con los botones, y centramos la gráfica en A(0, f(0)) con la orden **Seleccionar / Centro**.

¿Qué constatamos? : ....

2. Para buscar la ecuación de la recta reducida D_0 que es la que más se acerca a la curva C en el punto A, consideramos las rectas D_h que pasan por A y por un punto H(h, f(h)) de C. Notamos que m_h es la pendiente de la recta D_h. Escribir m_h en función de h: m_h = ...

Vamos a variar h. Rellenar la siguiente tabla:

h	-0.5	-0,25	-0,1	-0,05	0,5	0,25	0,1	0,05
f(h)								
m_h								
Ecuación de D_h								

Hacer el cálculo "a mano" en la primera columna. Utilizar *DERIVE* en las demás.

Para ello:

- En la ventana algebraica: **Editar expresión:** m(h):= .... Para hallar por ejemplo m cuando h=0.5, picar en Editar expresión m(0.5)= y pulsar la orden simplificar.
- Se procede de la misma forma para hallar f(h) y D(h). En lugar de llamar D(h) a la recta la llamaremos y, escribiremos en Editar expresión la expresión de la recta y = ... Sustituir el valor de h por 0.5, con el comando Simplificar / sustituir.

3. Para cada valor de h, dibujar D_h, y después borrarla. Para realizar esto:

- Cada vez que se llegue a una expresión de D_h = y, resaltar dicha expresión, pinchar con el ratón en la ventana 2D, y pulsar el comando Representar de dicha ventana.
- Para borrar la recta: Editar / Borrar gráfica / Última.

¿ Son "buenas" las rectas obtenidas? (Para "zumear reduciendo" pulsar F10)

4. Leer en la gráfica el valor de la pendiente de la recta que corresponde al valor h=0: m_0= ....

Intentar escribir la expresión de dicha pendiente en forma de límite: m_0= lim ...

Calcular este límite.

5. Demostrar que, para todo h $\in$[-1/2, ½], $|f(h)-(-1-h)|\leq 4h^2$.

B. Suponemos que a = 1

1. Completar: m(h) = ... ; m_1=lim...

Calcular m_1 y dar la ecuación reducida de la recta D1. Hacer una verificación gráfica.

2. Dar una aproximación afín A(h) de f(1+h) : A(h) = ...

Demostrar que, para todo h $\in$[-1/2, ½], $|f(h)-A(h)|\leq h^2$

DERIVACIÓN Y RESOLUCIÓN DE ECUACIONES.

NIVEL

2º curso de Bachiller

OBJETIVOS

- → Familiarizar a los alumnos con el concepto de biyección entre dos intervalos reales.
- → Hacer ver a los alumnos que la resolución de una ecuación puede hacerse por aproximaciones sucesivas e ilustrar gráficamente el método utilizado.
- → Realizar el vínculo entre el método analítico (cálculos algebraicos) y el método gráfico (calculadora)
- → Mostrar un ejemplo de utilización de una calculadora gráfica.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

- Función derivada; aplicación al sentido de variación de una función.
- Función derivable de signo constante sobre un intervalo y biyección; aplicación a la resolución de ecuaciones.

MATERIAL Y ORGANIZACIÓN

Aula de informática: 1 ordenador con *DERIVE* para Windows y una calculadora para cada dos alumnos.

Duración: 1 hora para la sesión en el aula de informática (para la toma de contacto con el método), y 1 hora para interpretar esta sesión.

DESCRIPCIÓN

Se trata de una sesión de introducción: en principio los alumnos no conocen hasta la sesión informática el concepto de biyección.

Problema

Sea C la curva de ecuación $y = \frac{1}{3}x^3$ y D la recta de ecuación $y = x - 1$. Se quiere determinar el número de puntos de intersección entre C y D, así como un valor aproximado 10^{-4} de las abcisas de esos puntos.

I. **Visualizar los puntos de intersección.**

1. Trazar C y D. Determinar gráficamente el número de puntos de intersección entre C y D así como un intervalo entre dos enteros consecutivos de las soluciones encontradas.

¿Cómo hacerlo con *DERIVE*?.

Primero preparamos la pantalla para tener abiertas y visualizadas las dos ventanas: la ventana algebraica y la ventana gráfica.

Menú Ventana / Nueva ventana 2D

Menú Ventana / Mosaico Vertical

Para cambiar de una ventana a otra sólo necesitamos pinchar con el ratón la ventana que queremos utilizar.

En la ventana de las expresiones: **Menú Editar** expresión / escribimos la ecuación de la curva.

Activamos la ventana 2D y pinchamos **Representar** . Tendremos la curva dibujada. Para dibujar la recta procedemos de manera análoga.

2. ¿Podemos encontrar resultados más precisos?

Con *DERIVE* podemos ampliar la gráfica: tecleamos F9. Para reducir la gráfica pinchamos F10. También podemos centrar la figura: **Menú Seleccionar / Centro**.

II. **Valores aproximados de las abcisas.**

Para simplificar y utilizar un método más general, lo reducimos a la resolución de una ecuación f(x) = 0.

1. Determinar la función f; dibujar f sobre la gráfica anterior, ¿encontramos gráficamente el resultado?

Para trabajar este apartado con *DERIVE*, definimos la función f(x) : = ... desde la orden Editar Expresión, y después en la ventana 2D dibujar la gráfica como se explica en el apartado anterior. Para calcular f(-2) por ejemplo, es suficiente utilizar el comando Editar expresión, picar f(-2)=, y *DERIVE* nos calcula el valor de la función, ya que la hemos definido con anterioridad.

2. Establecer la tabla de variación de la función f.

a. ¿Qué podemos decir del signo de f' (x) en el intervalo [-3, -2]?

b. Calcular f(-3) y f(-2)

c. Sea a un número real del intervalo [f(-3), f(-2)]; interpretar gráficamente la ecuación f(x)=a, después el número de soluciones de esta ecuación en el intervalo [-3, -2].

Decimos que f realiza un biyección del intervalo [-3, -2] sobre el intervalo [f(-3), f(-2)] para indicar el hecho de que para todo elemento a de [f(-3),f(-2)] , la ecuación f(x) = a admite una solución única en [-3, -2].

d. ¿0 es el elemento de 10^{-3} [f(-3), f(-2)]?. ¿Cuándo la ecuación f(x)=0 tiene soluciones en [-3, -2]?

e. Llamamos $x_.$ a la solución buscada. Utilizando el siguiente método y ayudados por la representación gráfica de f, determinar 4 intervalos de amplitud 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, y 10^{-4}, completando las siguientes frases:

f realiza una biyección de [... , ...] sobre [... , ...], pues ... < x_0 < ...

f realiza una biyección de [... , ...] sobre [... , ...], pues ... < x_0 < ...

f realiza una biyección de [... , ...] sobre [... , ...], pues ... < x_0 < ...

f realiza una biyección de [... , ...] sobre [... , ...], pues ... < x_0 < ...

Utilizaremos el Zoom F9 y el Seleccionar centro para comprobar los valores buscados.

DOCUMENTO PARA LA SEGUNDA SESIÓN.

Representación de las curvas de ecuación: $y = \frac{1}{3}x^3$; $y = x-1$ y $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - (x-1)$

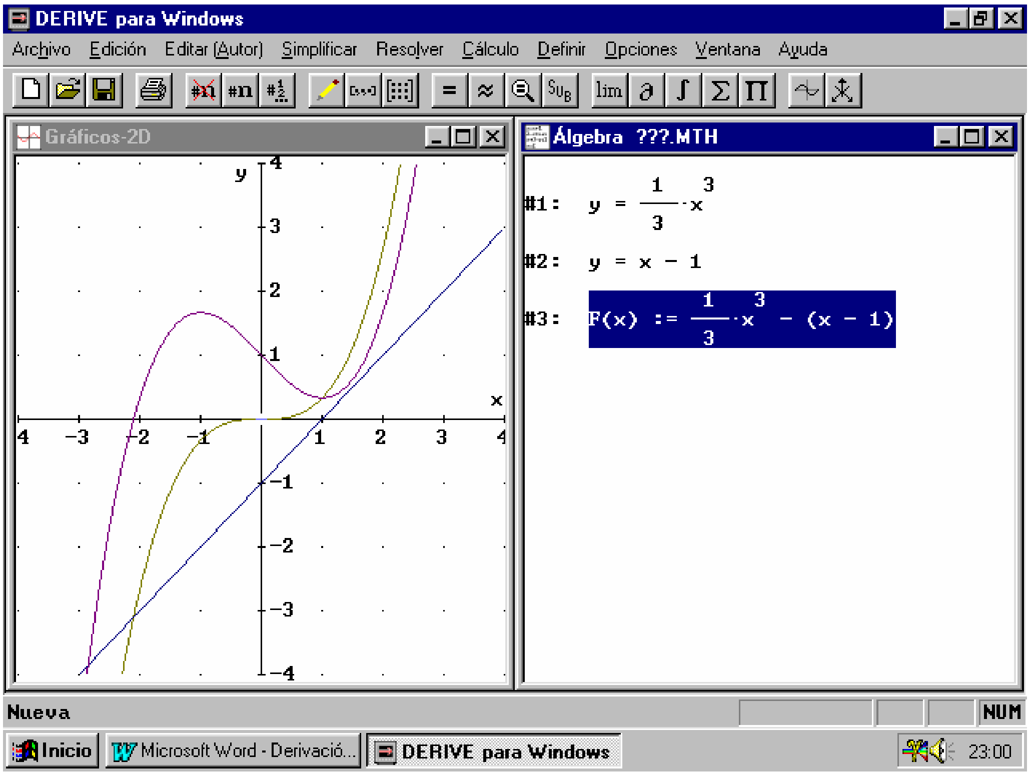
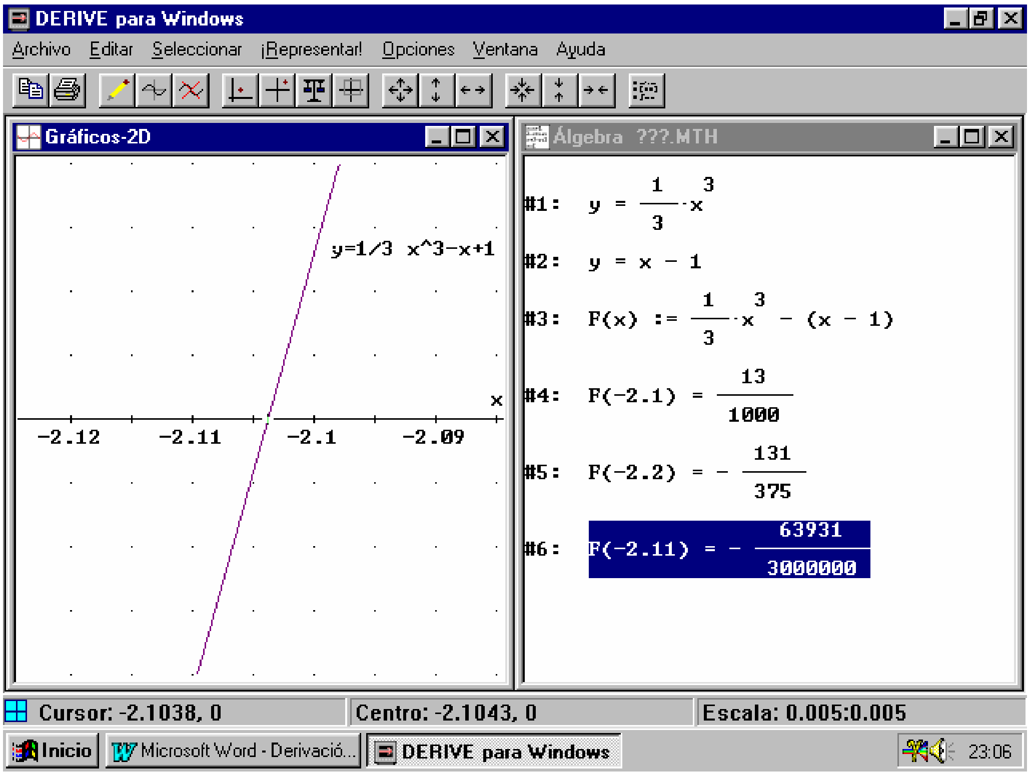


Ilustración del intervalo $-2{,}11 < x_0 < -2{,}10$



PROBLEMAS DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS.

NIVEL

- 2º curso de Bachiller.

OBJETIVOS

- Trabajar los conceptos de máximos y mínimos ya estudiados.
- Deducir de la gráfica de una función los máximos y mínimos, y el valor de la función en estos puntos.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

- Concepto de máximo y de mínimo.

MATERIAL Y ORGANIZACIÓN

Se agrupan los alumnos de dos en dos.

Necesitamos para la segunda sesión el aula de informática con un ordenador para cada dos alumnos, y con *DERIVE* para Windows.

DESCRIPCIÓN

Dividimos el trabajo en dos sesiones. En la primera se plantean los problemas de máximos y mínimos, sin necesidad de resolverlos. Esta sesión se puede realizar en el aula o en casa. La segunda sesión se realiza en el aula de informática. Los alumnos tienen en su hoja de trabajo para la segunda sesión, el planteamiento de los problemas que se ha corregido en la sesión anterior. También en esta hoja de trabajo tienen escritas las órdenes que *DERIVE* necesita para trabajar. Quizá sólo sea necesario explicar la resolución del primer problema con *DERIVE*.

1. - PLANTEAMIENTO DE LOS PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN.

El objetivo de este primer apartado es el planteamiento de los siguientes problemas de aritmética, geometría o de la vida de todos los días. Hay que elegir las incógnitas convenientemente. No se pide resolver ninguno de estos problemas.

Problema 1:

Un cine tiene 400 espectadores si el precio de la entrada es de 3 francos. La asistencia disminuye en 40 espectadores cada vez que el precio aumenta 1 franco. ¿Cuál es el precio que dará el mayor beneficio?

Problema 2:

Cortamos una cuerda en dos trozos; con uno de ellos formamos un círculo, y con el otro un cuadrado. ¿Por donde tenemos que cortar la cuerda para que la suma de las áreas sea mínima?

Problema 3:

Una caja sin tapa se ha formado a partir de una lámina cuadrada de metal blanco, cortando en cada esquina un pequeño cuadrado y plegando los costados. ¿Cómo hacerlo para que el volumen de esta caja sea máximo?

Problema 4:

¿Cómo fabricar una caja de conserva cilíndrica de 1 litro de volumen utilizando la mínima cantidad de metal posible?

Problema 5:

Se ha colocado una estatua de 45 m de altura sobre un pedestal también de 45 m de altura. Queremos fotografiar esta estatua con una máquina de fotografiar situada sobre un pie de 1,5 m de altura. ¿A qué distancia debemos situar el aparato para ver la estatua bajo un ángulo máximo?.

2. - RESOLUCIÓN GRÁFICA DE LOS PROBLEMAS DE MÁXIMOS Y MÍNIMOS.

En este apartado vamos a buscar gráficamente la (ó las) solución (soluciones) de los problemas de optimización que hemos planteado en el apartado anterior.

Podemos hacer un pequeño solucionario de los planteamientos anteriores, para que todos tengamos clara la búsqueda de soluciones.

Problema 1. Llamamos x al precio de la entrada y n la desviación que se produce al aumentar el precio de la entrada: x = 3 + n . Llamamos f(n) a los ingresos: f(n) = (400-40n).(3+n) = 40(10-n)(3+n)	*Problema 2:* Llamamos l a la longitud de la cuerda, x a la longitud del primer trozo; l-x será la longitud del segundo trozo. La suma de las áreas del círculo y del cuadrado será: $S(x) = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{(l-x)^2}{16}$
Problema 3 Llamamos y al lado de la hoja cuadrada de metal blanco y x al lado del cuadradito que cortamos. El volumen de esta caja es pues: $V(x) = (y-2x)^2 \cdot x$	*Problema 4* Llamamos r al radio de la caja cilíndrica y h a la altura. La superficie de metal utilizado es: $S(r) = \frac{2}{r} + 2\pi r^2$

Vamos a pensar cómo lo vamos a resolver con *DERIVE*:

Necesitamos tener abiertas las dos ventanas: la ventana algebraica y la ventana gráfica 2D.

Una vez abrimos *DERIVE* nos aparece la ventana algebraica. Para abrir la ventana gráfica 2D, o bien pinchamos el botón que tiene dibujados unos ejes cartesianos, o bien en el menú ventana elegimos **Nueva ventana 2D**. Una vez abierta esta ventana, elegimos en el menú ventana el **Mosaico vertical** (si queremos horizontal), para tener a la vista las dos ventanas. Para pasar de una a otra bastará pinchar con el ratón la ventana en la que se desee trabajar.

En la ventana algebraica escribiremos, con el menú **Editar expresión**, la función que queremos dibujar. Una vez escrita, y resaltada, pasaremos a la ventana 2D y la dibujaremos pinchando el menú **¡Representar!**

Posiblemente necesitemos utilizar el zoom en los dos ejes a la vez, o sólo en uno, para escoger las coordenadas adecuadas para la ventana gráfica. La ventana 2D tiene botones con flechas que representan el **zoom**. También nos puede servir seleccionar el centro de la ventana 2D en un punto determinado para ver más clara la solución, esto lo conseguiremos en el menú **Seleccionar/ centro**.

Problema 1:

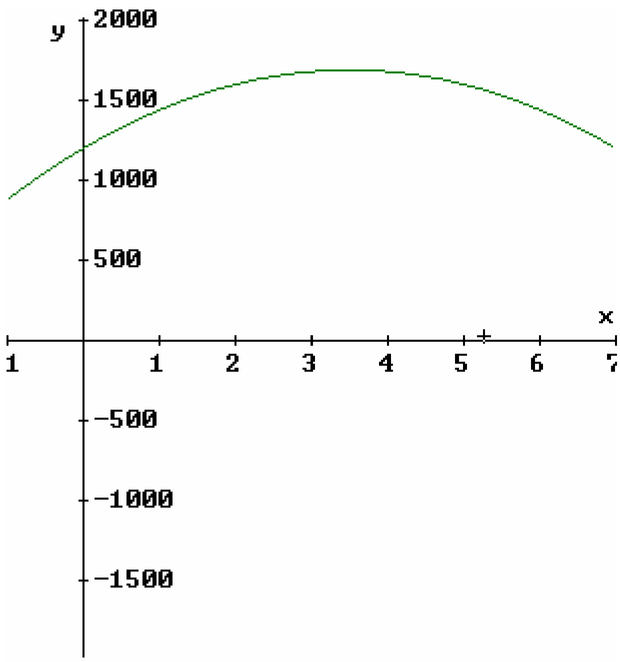
Para el primer problema escribimos en la **ventana algebraica**:

Editar expresión: 40.(10-n). (3+n)

Pasamos a la ventana 2D:

¡Representar! Probablemente no tengamos demasiado clara como es esta función. Necesitamos "zumear". Si "zumeamos" el eje de ordenadas encontramos el máximo: cuando la entrada vale 3,5 francos, los ingresos son de 1690

El máximo lo buscamos con el cursor de la ventana 2D, y en el margen inferior encontramos la situación exacta.



¿Qué comandos vamos a utilizar con *DERIVE*?

<u>En la ventana Algebraica:</u>

En el menú EDITAR:

Editar expresión	Para escribir una expresión

En el menú EDICIÓN:

Suprimir	Para eliminar la expresión seleccionada.
Mover	Para cambiar las expresiones de sitio
Renumerar	Para volver a numerar las expresiones

En el menú Ventana:

Nueva ventana 2D	Para abrir la ventana gráfica
Mosaico horizontal/vertical	Para ver las dos ventanas a la vez.

Utilizaremos el ratón para cambiar de ventana.

En la ventana gráfica:

¡Representar!	Para dibujar la función.
Seleccionar/Centro	Para situar el centro de la ventana convenientemente
Seleccionar/cursor	Para posicionar el cursor donde queramos.
Seleccionar/Escala	Para “zumear” los ejes convenientemente.
Seleccionar/Rango	Para elegir las unidades de los ejes.

Existen 6 botones en el menú correspondiente de la ventana gráfica, para “zumear” tal y como necesitemos, al igual que existen también botones para situar el cursor, el centro, la escala... .

¿Qué teclas de funciones vamos a utilizar?

F3: para pegar la expresión seleccionada.

F10: zoom reduciendo

F8: reducción vertical

F6: reducción horizontal

F9: zoom ampliando

F7: ampliación vertical

F5: ampliación horizontal

Problema 2:

Lo primero que tenemos que hacer es definir la suma de las áreas en la ventana algebraica:

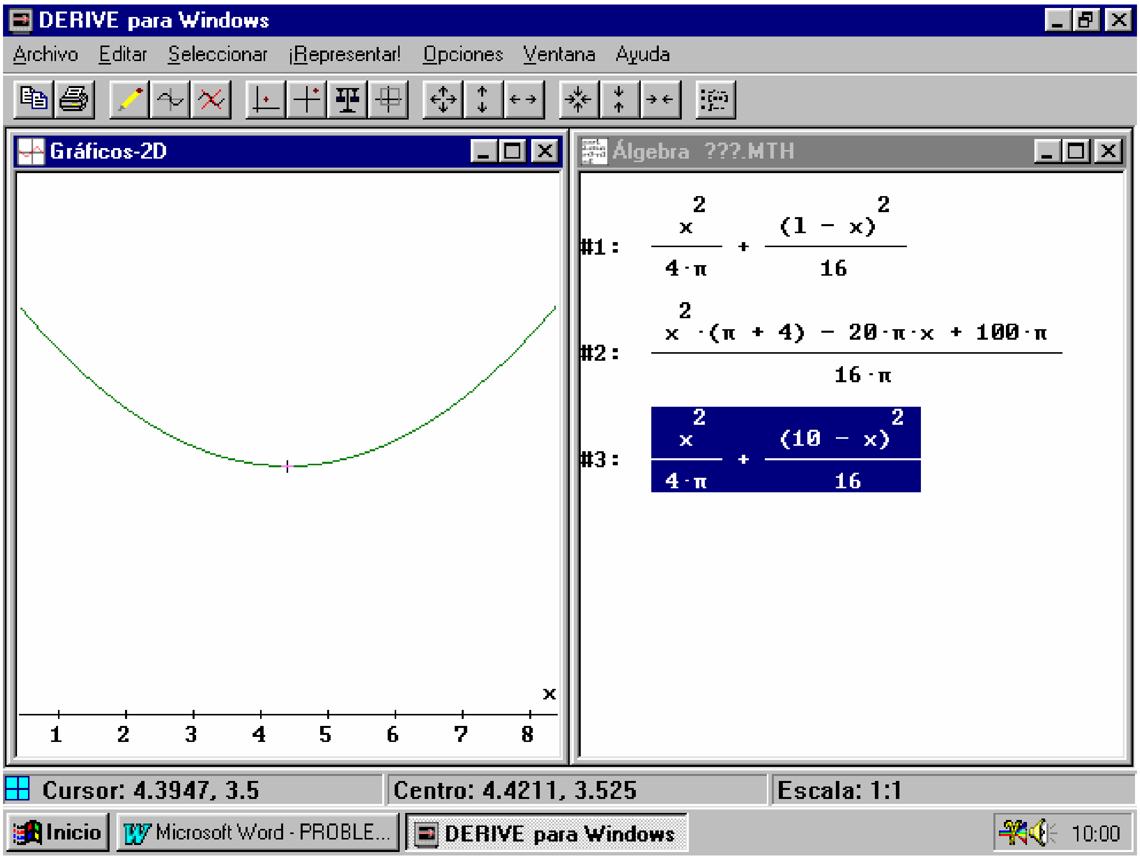
Menú Editar:

Editar expresión: $\frac{x^2}{4\pi}+\frac{(l-x)^2}{16}$

Le damos una valor arbitrario a la longitud de la cuerda:

Menú Simplificar:

Sustituir / Variables: Elegimos l y la sustituimos por el valor que queramos, por ejemplo 10/ Si.



Podemos practicar cambiando la longitud de la cuerda.

En este problema utilizamos un comando nuevo de *DERIVE*:

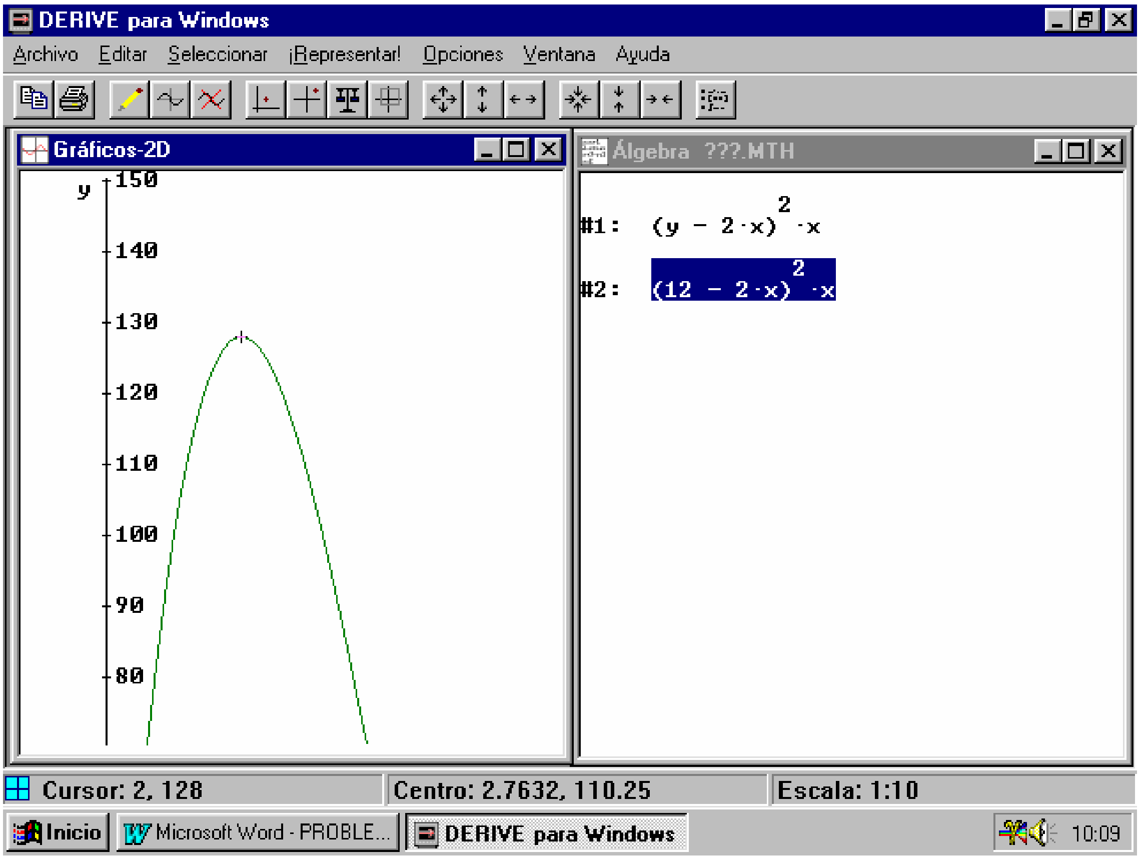
Menú Simplificar:

Sustituir / Variables

Problema 3:

Procedemos de la misma forma que en el problema anterior: definimos el volumen de la caja, le damos un valor arbitrario al lado de la caja, y = 12, y dibujamos.

Hemos buscado el máximo con el zoom, y hemos colocado el cursor convenientemente en el máximo (2, 128). En la pantalla se ve, dentro de la ventana gráfica, la posición del cursor.



Problema 4:

En este ejercicio se define la superficie de metal utilizado, y se dibuja buscando el mínimo.

PROGRAMACIÓN LINEAL.

NIVEL

Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II. 2º Bachillerato.

OBJETIVOS

- Trabajar los conceptos de variables, función objetivo y restricciones.
- Resolución gráfica de los problemas do programación lineal.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Concepto de optimización.

MATERIAL Y ORGANIZACIÓN

Material de autoaprendizaje. Aula de informática con un ordenador por cada dos alumnos. *DERIVE* para Windows instalado.

Duración: 2 sesiones.

DESCRIPCIÓN

En el aula de informática, dos alumnos por cada ordenador. Recomendamos que cada ejercicio lo realice un alumno. Se entrega el material tal y como está preparado para ir trabajando conforme se va leyendo, no se necesita de ninguna explicación previa.

1. - ACTIVIDADES PUBLICADAS EN LA REVISTA DE LA ASOCIACIÓN DE USUARIOS DE *DERIVE* DE ESPAÑA.

Estas actividades, dos resueltas y dos propuestas han sido elaboradas por Mª Pilar Palafox Guillén y Mª Paloma Rodríguez López del I.B.Luis de Lucena (Guadalajara).

Actividad resuelta nº1.

Problema de Programación Lineal con solución única.

Enunciado

En una fábrica se construyen sillas grandes y pequeñas. Las sillas grandes necesitan 4 m^2 de madera y las pequeñas 3 m^2. El fabricante necesita construir al menos tres sillas grandes y al menos el doble de pequeñas que de grandes. Si dispone de 60m^2 de madera y los beneficios son de 100 ptas. y de 300 ptas. por silla pequeña y grande, respectivamente. ¿Cuántas sillas de cada tipo se deben construir para obtener el máximo beneficio?

Estrategia a seguir

Traducir las restricciones a inecuaciones, y el beneficio a función objetivo. Representar gráficamente la región factible y la dirección correspondiente a las rectas que señalan el beneficio, y elegir adecuadamente el punto o puntos que hacen máximo el beneficio.

Resolución

Pregunta nº1:

Define las variables que vas a emplear y su unidad de medida. Sea x > 0 el número de sillas grandes. Sea y > 0 el número de sillas pequeñas. Se sobreentiende que x e y son números enteros.

Pregunta nº2:

¿Cuál es la función objetivo?
$F(x, y) = 300x + 100y$

Pregunta nº3:

¿Cuáles son las restricciones?
$4x + 3y < 60$
$x > 3$
$y > 2x$

A partir de este momento empiezas a utilizar *DERIVE*. Pulsa ÚNICAMENTE las teclas que se indica a continuación y responde a las preguntas que se intercalan:

Para ello abrimos *DERIVE* y.

Menú ventana: Nueva ventana 2D

Menú ventana: Mosaico vertical

Pregunta nº4:

¿Cómo ha quedado configurada la ventana?
Preparamos la pantalla de *DERIVE* con las dos ventanas, la algebraica y la gráfica, abiertas a la vez, en forma de mosaico vertical.

Con el ratón nos situamos en la pantalla gráfica.

Menú Seleccionar: Centro: Horizontal 3, Vertical 3

Pregunta nº5:

¿Qué nueva modificación has introducido?. Justifícala.
Hemos variado el centro de la ventana gráfica, con el fin de situarnos en el primer cuadrante, que es donde debemos buscar la solución del problema propuesto.

Recordamos que con el ratón puedes moverte de la ventana del álgebra a la ventana gráfica, sin necesidad de utilizar ninguna orden.

En la ventana algebraica:

Editar Expresión: 4x + 3y = 60 ↲

En la ventana gráfica:

Opciones: Color de las gráficas. Cambio de color automático. No**. Representar. Zoom ó F10**

En la ventana algebraica:

Editar Expresión: x = 3 ↲

En la ventana gráfica:

Representar.

Editar Expresión: y = 2x ↲

En la ventana gráfica:

Representar. Seleccionar: centro Horizontal 4,Vertical 12

Pregunta nº6:

¿Qué rectas has dibujado?

Las rectas que delimitan cada uno de los semiplanos soluciones de las inecuaciones que establecen las restricciones.

¿Ha quedado determinada la región factible?. En caso afirmativo, identifícala.

Sí. Es la región determinada por el triángulo cuyos vértices son los puntos en que se intersecan, dos a dos, las rectas que se acaban de dibujar.

Editar vector: 2 componentes [#1, #2] ↲

También podemos crear el vector desde: **Editar expresión: [#1, #2]**

Resolver / Simplificar ↲

Pregunta nº7:

¿Qué sistema acabas de resolver? ¿Cuál es su solución?
$$\left.\begin{array}{r} 4x+3y=60 \\ x=3 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Solución}: x=3,\ y=16$$

Editar vector: 2 componentes [#1, #3] ↵

Resolver / Simplificar ↵

Pregunta nº8:

¿Qué sistema acabas de resolver? ¿Cuál es su solución?
$$\left.\begin{array}{r} 4x+3y=60 \\ y=2x \end{array}\right\} \rightarrow \text{Solución}: x=6,\ y=12$$

Editar vector: 2 componentes [#2, #3] ↵

Resolver / Simplificar ↵

Pregunta nº9:

¿Qué sistema acabas de resolver? ¿Cuál es su solución?
$$\left.\begin{array}{r} x=3 \\ y=2x \end{array}\right\} \rightarrow \text{Solución}: x=3,\ y=6$$

Editar expresión: F(x, y): = 300x+100y ↵

Pregunta nº10:

¿Ha qué corresponde la expresión introducida?
Es la función objetivo.

<u>**Ahora tienes dos posibles opciones para terminar de resolver el problema:**</u>

1. - Método Analítico:

Editar vector: dimensión 3/elementos: F(3,6), F(3,16), F(6,12). **Simplificar,** ↵

Pregunta nº11:

¿Qué cálculos acabas de efectuar?

Se ha evaluado la función objetivo en cada uno de los vértices de la región factible.

Selecciona la solución óptima (x, y):

(6, 12), es decir 6 sillas grandes y 12 sillas pequeñas.

Justifica dicha elección:

Este punto es el que maximiza la función objetivo.

¿Cuál es el beneficio máximo obtenido?

3000 pesetas.

2. - Método gráfico.

Editar expresión: G(p, q): =F(x, y)- F(p, q) ↵

Simplificar ↵

Pregunta nº12:

¿Qué expresión has conseguido?. Justifícala.

G(p, q)= 300x + 100y –100(3p + 2q).

G(p, q) nos proporciona rectas con la misma dirección que la función objetivo F(x, y)

Ventana algebraica:

Editar expresión: G(0,0)=0 ↵

Ventana 2D:

Opciones/ color de la gráfica/ cambio de color automático/ Si

Representar.

Ventana algebraica:

Editar expresión: G(3,6)=0 ↵

Ventana 2D:

Representar.

Ventana algebraica:

Editar expresión: G(3,16)=0 ↵

Ventana 2D:

Representar.

Ventana algebraica:

Editar expresión: G(6,12)=0 ↵

Ventana 2D:

Representar.

Pregunta nº13:

¿Qué rectas has dibujado?

La función objetivo en primer lugar, y después las rectas paralelas a ella por los puntos (3, 6), (3, 16) y (6, 12) respectivamente.

Pregunta nº14:

¿Cuál de ellas tiene mayor ordenada en el origen?

La que pasa por el punto (6, 12).

¿Qué verifica el vértice de la región factible por el que pasa?

Dicho vértice, que es el punto (6, 12), es la solución óptima del problema; esto es, se deben fabricar 6 sillas grandes y 12 pequeñas para obtener el máximo beneficio.

¿Cuál es el valor máximo que la función objetivo alcanza en él?

Ventana algebraica:

Editar expresión F(6,12)= ↵

3000 pesetas.

Actividad resuelta nº2.

Problema de Programación Lineal con infinitas soluciones.

Enunciado

Se quiere elaborar una dieta diaria para ganado que satisfaga unas condiciones mínimas de contenidos vitamínicos al día: 2mg de vitamina A, 3 mg de vitamina B, 30 de la C y 2 de la D. Para ello se van a mezclar piensos de dos tipos, P y Q, cuyo precio por Kg es para ambos de 30 pts y cuyo contenido vitamínico por Kg es el siguiente:

	A	B	C	D
P	1mg	1mg	20 mg	2 mg
Q	1mg	3 mg	7,5 mg	0 mg

¿Cómo deben mezclarse los piensos para que el gasto sea mínimo?. ¿Cuál es ese gasto mínimo?.

Estrategia a seguir

Traducir las restricciones a inecuaciones, y el gasto a función objetivo. Representar gráficamente la región factible y la dirección de las rectas de coste, y elegir adecuadamente el punto o puntos que hacen mínimo el gasto.

Resolución

Pregunta nº1:

Define las variables que vas a utilizar y su unidad de medida.

Sea x = Kilos de pienso de tipo P

Sea y = Kilos de pienso de tipo Q

Pregunta nº2:

¿Cuál es la función objetivo?

F(x, y) = 30x + 30y

Pregunta nº3:

¿Cuáles son las restricciones?

$x + y > 2$ vitamina A

$x + 3y > 3$ vitamina B

$20x + 7{,}5y > 30$ vitamina C

$2x > 2$ vitamina D

$x > 0$, $y > 0$.

<u>A partir de este momento empiezas a utilizar *DERIVE*. Pulsa ÚNICAMENTE las teclas que se indica a continuación y responde a las preguntas que se intercalan:</u>

Para ello abrimos *DERIVE* y.

Menú ventana: Nueva ventana 2D

Menú ventana: Mosaico vertical

Pregunta nº4:

¿Cómo ha quedado configurada la ventana?

Preparamos la pantalla de *DERIVE* con las dos ventanas, la algebraica y la gráfica, abiertas a la vez, en forma de mosaico vertical.

Con el ratón nos situamos en la pantalla gráfica.

Menú Seleccionar: Centro: Horizontal 3, Vertical 3

Pregunta nº5:

¿Qué nueva modificación has introducido?. Justifícala.

Hemos variado el centro de la ventana gráfica, con el fin de situarnos en el primer cuadrante, que es donde debemos buscar la solución del problema propuesto.

Recordamos que con el ratón puedes moverte de la ventana del álgebra a la ventana gráfica, sin necesidad de utilizar ninguna orden.

En la ventana algebraica:

Editar Expresión: x + y = 2 ↵

En la ventana gráfica:

Opciones: Color de las gráficas. Cambio de color automático. No**. Representar. Zoom ó F10**

En la ventana algebraica:

Editar Expresión: x + 3y = 3 ↵

En la ventana gráfica:

Representar.

En la ventana algebraica:

Editar Expresión: 20x +7,5y = 30 ↵

En la ventana gráfica:

Representar.

En la ventana algebraica:

Editar Expresión: 2x = 2 ↵

En la ventana gráfica:

Representar.

En la ventana algebraica:

Editar Expresión: x = 0 ↵

En la ventana gráfica:

Representar.

En la ventana algebraica:

Editar Expresión: y = 0 ↵

En la ventana gráfica:

Representar.

Pregunta nº6:

¿Qué rectas has dibujado?

Las rectas que delimitan cada uno de los semiplanos soluciones de las inecuaciones que establecen las restricciones.

¿Ha quedado determinada la región factible? En caso afirmativo, identifícala.

Sí. Se trata de una región que no está acotada superiormente; inferiormente está delimitada por las rectas 20x+7,5y=30, 2x=2, x+y=2 y x+3y=3.

Editar vector: 2 componentes [#1, #2] ↵

También podemos crear el vector desde: **Editar expresión: [#1, #2]**

Resolver / Simplificar ↵

Pregunta nº7:

¿Qué sistema acabas de resolver? ¿Cuál es su solución?

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 2 \\ x + 3y &= 3 \end{aligned}\right\} \to \text{Solución} : x = 3/2,\ y = 1/2$$

Editar vector: 2 componentes [#1, #3] ↵

Resolver / Simplificar ↵

Pregunta nº8:

¿Qué sistema acabas de resolver? ¿Cuál es su solución?

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 2 \\ 20x + 7.5y &= 30 \end{aligned}\right\} \to \text{Solución} : x = 6/5,\ y = 4/5$$

Editar vector: 2 componentes [#3, #4] ↵

Resolver / Simplificar ↵

Pregunta nº9:

¿Qué sistema has resuelto? ¿Cuál es su solución?

$$\left.\begin{aligned} 20x + 7.5y &= 30 \\ 2x &= 2 \end{aligned}\right\} \to \text{Solución} : x = 1,\ y = 4/3$$

Editar vector: 2 componentes [#2, #6] ↵

Resolver / Simplificar ↵

Pregunta nº10:

¿Qué sistema has resuelto? ¿Cuál es su solución?
$\left.\begin{matrix} x + 3y = 3 \\ y = 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \text{Solución} : x = 3,\ y = 0$

Editar expresión: F(x, y): = 30x+30y ↵

Pregunta nº11:

¿A qué corresponde la expresión introducida?
Es la función objetivo.

<u>Ahora tienes dos posibles opciones para terminar de resolver el problema:</u>

1. - Método analítico.

Editar vector: dimensión 4/elementos: F(3/2,1/2), F(6/5,4/5), F(1,4/3), F(3, 0). **Simplificar,** ↵

Pregunta nº12:

¿Qué cálculos acabas de efectuar?
Se ha evaluado la función objetivo en cada uno de los vértices de la región factible.
¿Puedes seleccionar una única solución óptima (x, y)? ¿Por qué?
No, ya que tanto el punto (☝, 🗁), como el punto (6/5, 4/5) hacen el gasto mínimo. Por lo tanto se puede concluir que este problema tiene infinitas soluciones, siendo éstas todos los puntos del segmento de extremos (☝, 🗁) y (6/5, 4/5).
¿Cuál es el gasto mínimo obtenido?
60 pesetas.

2. - Método gráfico.

Editar expresión: G(p, q): =F(x, y)- F(p, q) ↵

Simplificar ↵

Pregunta nº13:

¿Qué expresión has conseguido?. Justifícala.
G(p, q)= 30x + 30y –30(p + q).
G(p, q) nos proporciona rectas con la misma dirección que la función objetivo F(x, y)

Ventana algebraica:

Editar expresión: G(0,0)=0 ↵

Ventana 2D:

Opciones/ color de la gráfica/ cambio de color automático/ Si

Representar.

Ventana algebraica:

Editar expresión: G(3/2, 1/2)=0 ↵

Ventana 2D:

Representar.

Ventana algebraica:

Editar expresión: G(6/5, 4/5)=0 ↵

Ventana 2D:

Representar.

Ventana algebraica:

Editar expresión: G(1, 4/3)=0 ↵

Ventana 2D:

Representar.

Ventana algebraica:

Editar expresión: G(3, 0)=0 ↵

Ventana 2D:

Representar.

Pregunta nº14:

¿Qué rectas has dibujado?

La función objetivo en primer lugar, y después las rectas paralelas a ella por los puntos (3/2, 1/2), (6/5, 4/5), (1, 4/3) y (3, 0) respectivamente.

Pregunta nº15:

¿Observas algo especial?

Sí. las rectas paralelas a la función objetivo que pasan, respectivamente, por los puntos (3/2,1/2) y (6/5, 4/5) son coincidentes

Además estas rectas son las de mayor ordenada en el origen.

¿Cuál es la solución óptima?

Existen infinitas soluciones que nos dan el mínimo gasto; dichas soluciones son todos los puntos del segmento que une (3/2,1/2) con (6/5, 4/5).

¿Cuál es el valor mínimo que la función objetivo alcanza?

Para obtener el valor de mínimo gasto se calcula el valor numérico de la función objetivo en cualquiera de los puntos de dicho segmento. Por ejemplo, en (3/2,1/2)

Ventana algebraica:

Editar expresión F(3/2,1/2)= ↵

60 pesetas.

Tras haber realizado paso por paso las Actividades Resueltas, ya estás familiarizado/a con el uso de *DERIVE* para tratar problemas de Programación Lineal.

A continuación se te proponen dos nuevas Actividades que debes resolver ayudándote del guión de preguntas que se te proporcionó en las Actividades Resueltas.

No olvides que eres tú el que da las órdenes a la máquina y que debes razonar lo que haces y decidir cómo hacerlo. Actuando así, el ordenador te proporcionará gran ayuda.

Actividad propuesta nº1

Disponemos de un máximo de 21.000.000 pts para invertir en bolsa. Nos recomiendan dos tipos de acciones: las del tipo A, que rinden el 10%, y las del tipo B, que rinden el 8%. Decidimos invertir un máximo de 13.000.000 pts en las del tipo A, y como mínimo 600.000 pts en las del tipo B. Además, queremos que la inversión en las del tipo A sea menor o igual que el doble de la inversión en B.

¿Cuál tiene que ser la distribución de la inversión para obtener el máximo interés anual?

Actividad propuesta nº2

Una compañía posee dos minas: la mina A produce diariamente 1 tonelada de mineral de hierro de alta calidad, 3 toneladas de calidad media y 5 toneladas de baja calidad; la mina B produce 1 tonelada de alta calidad y 2 toneladas de cada una de las otras calidades.

La compañía necesita, al menos, 80 toneladas de mineral de alta calidad, 160 toneladas de mineral de calidad media y 200 toneladas de calidad baja. Sabiendo que el coste diario de la operación es de 200.000 pts en cada mina, ¿cuántos días debe trabajar cada mina para que el coste sea mínimo?.

REPASANDO LAS MATEMÁTICAS DE LA SECUNDARIA.

NIVEL

Haber superado las matemáticas de la Enseñanza Secundaria.

OBJETIVOS

- Recordar los conceptos aprendidos en el Bachiller.
- Trabajar con un asistente matemático.
- Notar la importancia de los conceptos matemáticos.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

- Se supone que los alumnos que realizan esta práctica han acabado la Secundaria, y/o están a punto de empezar la universidad.
- Si hay una falta de conocimientos, se puede utilizar la sesión para explicarlos a partir de la práctica propuesta.

MATERIAL Y ORGANIZACIÓN

Esta actividad la dividimos en 9 prácticas; cinco con una hora de duración, dos con dos horas y una práctica de tres horas.

Se puede pensar en 9 sesiones, e ir repartiendo las fichas según vayan acabando.

Está claro que necesitamos un aula de informática, con un ordenador, con *DERIVE* instalado, y dos estudiantes por cada ordenador.

Este material puede servir para cualquier asistente matemático que no sea *DERIVE*, y que responda de la misma forma que él.

DESCRIPCIÓN

Se necesita conocer un poco de *DERIVE* antes de empezar cada una de las sesiones en el aula de informática.

PRÁCTICA 1: ECUACIONES, INECUACIONES, ACOTACIONES Y DESIGUALDADES

Duración: 2 horas.

1.1 RESOLUCIÓN GRÁFICA DE ECUACIONES E INECUACIONES.

Consideramos las siguientes funciones:

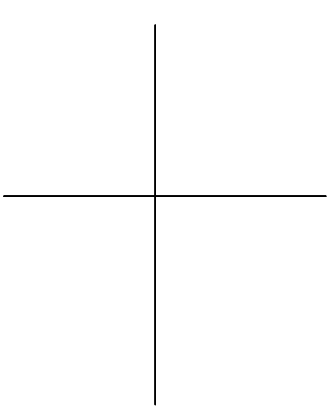
$$f(x) = -3x\,(x^2 + x - 2)$$

$$g(x) = 2\,x^2 - 2x - 4$$

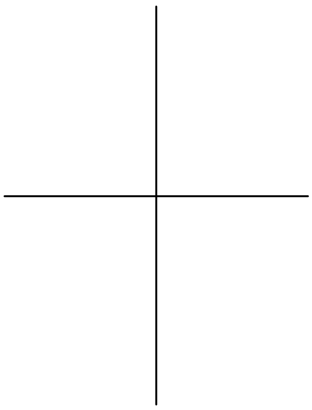
$$h(x) = \frac{x+3}{(x-1)(x+2)}$$

a) Representa cada una de estas funciones con tu asistente. Reproduce la gráfica en los ejes dados y señala en el eje OX los valores de x que cumplen las ecuaciones y desigualdades que se indican en cada caso.

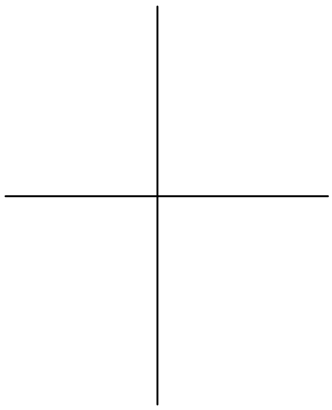
f(x) = 0



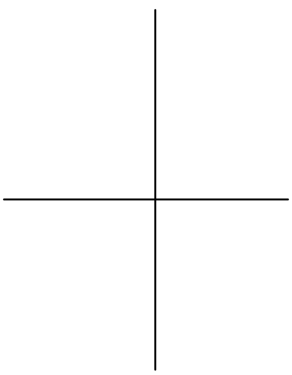
f(x) = -2



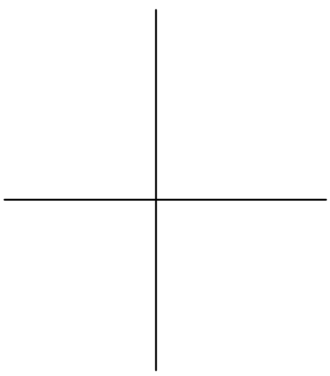
f(x) > 0



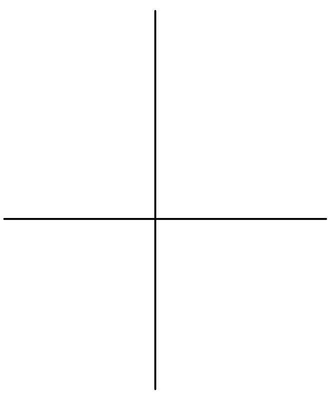
g(x) = 3



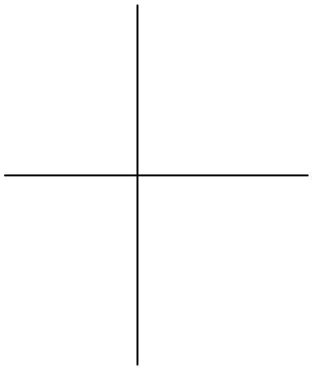
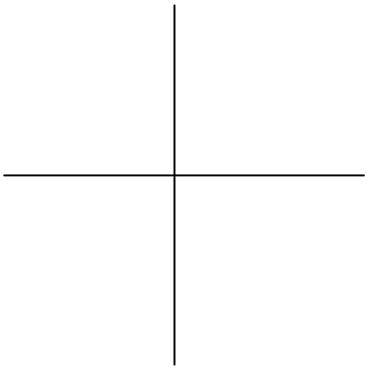
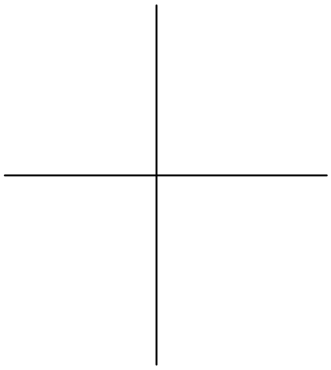
g(x) < 0



g(x) > 2



h(x) = -1/2 h(x) ≤ -3 h(x) ≥ 0

b) Resuelve las ecuaciones y desigualdades anteriores algebraicamente con tu programa de cálculo (*DERIVE*), y comprueba que las soluciones coinciden con lo dibujado en el apartado a).

f(x) = 0 Solución:
f(x) = -2 Solución:
f(x) > 0 Solución:
g(x) = 3 Solución:
g(x) < 0 Solución:
g(x) > 2 Solución:
h(x) = -1/2 Solución:
h(x) ≤ 3 Solución:
h(x) ≥ 0 Solución:

1.2. COTAS DE UNA FUNCIÓN EN UN INTERVALO.

Consideramos las tres funciones del apartado anterior.

a) Con la ayuda de las gráficas indica si f(x) y g(x) están acotadas en $\Re$.

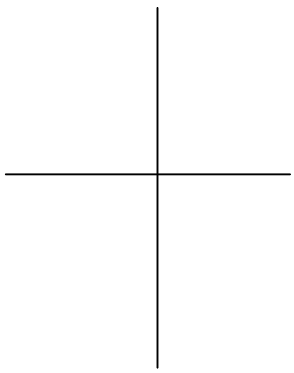
Cota inferior		Cota superior
	≤ f(x) ≤	
	≤ g(x) ≤	

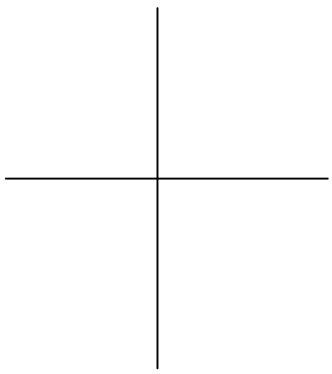
b) Da una cota superior y otra inferior, cuando existan, para f(x), g(x) y h(x) en el intervalo que se indica. Para esto es de bastante ayuda representar cada una de las funciones sólo en el intervalo que se pide. (utilizarás la función IF)

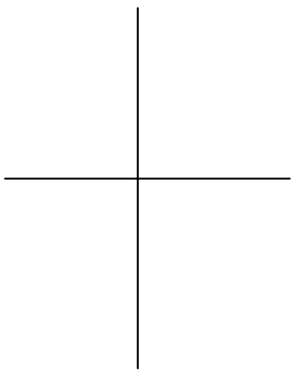
	Cota inferior		Cota superior
Si x ∈ [-2, 1], entonces		≤ f(x) ≤	
Si –2 ≤x ≤ 2, entonces		≤ g(x) ≤	
Si x ∈ [-2, 0], entonces		≤ h(x) ≤	
Si x < -2, entonces		≤ h(x) ≤	

c) Representa gráficamente las funciones: |f(x) |, | g(x) | y | h(x) |.

|f(x) | | g(x) | | h(x) |







• ¿Encuentras alguna relación con las gráficas de f(x), g(x) y h(x)?. ¿Cuál?

• Da una cota superior para cada una de las funciones, si es que existe, en los intervalos siguientes. (Al igual que antes, también puede ser útil la representación de cada una de las funciones en sus respectivos intervalos)

		Cota superior
Si x $\in$ [-2, 1], entonces	$\|f(x)\|.\leq$	
Si $-2 \leq x \leq 2$, entonces	$\| g(x) \| \leq$	
Si x $\in$ [-2, 0], entonces	$\| h(x) \|.\leq$	
Si x < -2, entonces	$\| h(x) \|.\leq$	

- ¿Estas últimas cotas tienen alguna relación con las que hemos hallado anteriormente?. Si la hay, explica cuál es.

1.3. RESOLUCIÓN GRÁFICA DE DESIGUALDADES DEL TIPO f(a) < f(b)

a) A partir de la gráfica de y = |x|, estudia la relación que hay entre |a| y |b| cuando a < b, distinguiendo los casos que sean necesarios.

Utiliza las propiedades de orden de los números reales y la definición de la función |x| para justificar analíticamente los resultados obtenidos.

b) A partir de la gráfica de $y = \dfrac{1}{(x-1)^2}$, estudia qué relación hay entre $\dfrac{1}{(a-1)^2}$ y $\dfrac{1}{(b-1)^2}$ cuando $a < b$ distinguiendo los casos que sean necesarios.

Utiliza las propiedades de orden de los números reales para justificar analíticamente los resultados obtenidos.

PRÁCTICA 2: PROPIEDADES GENERALES DE UNA FUNCIÓN.

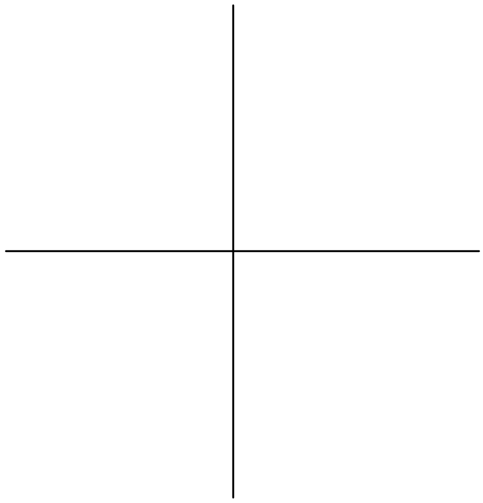
Duración: 1 hora

2.1. ESTUDIO DEL DOMINIO DE UNA FUNCIÓN

a) Representa con tu asistente matemático, la función:

$$g(x) = \sqrt{-x^3 + 3x^2 + 4x - 12}$$

y reproduce la gráfica en los ejes dados.



Observando la gráfica, indica el dominio de la función:

Para cada una de las siguientes relaciones, determina los valores de $x \in \Re$ que la verifican:

$-x^3 + 3x^2 + 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow$

$-x^3 + 3x^2 + 4x - 12 > 0 \Leftrightarrow$

$-x^3 + 3x^2 + 4x - 12 < 0 \Leftrightarrow$

¿Están en el dominio de g las soluciones de $-x^3 + 3x^2 + 4x - 12 = 0$?

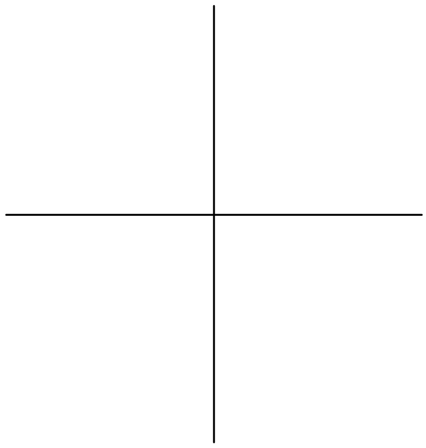
¿Qué relación tiene el signo de $-x^3 + 3x^2 + 4x - 12$ con el dominio de g(x)?

¿Qué podemos decir del dominio de una función del tipo $\sqrt{p(x)}$ siendo p(x) una función cualquiera?

b) Consideramos la función:

$$f(x) = \frac{10x+5}{x^4+x^3+2x-4}.$$

Represéntala con tu asistente (*DERIVE*) y reproduce la gráfica en los ejes cartesianos dados.



Observando la gráfica, indica el dominio de f :

Resuelve la ecuación $x^4 + x^3 + 2x - 4 = 0$. Solución:

¿Qué relación tiene con el dominio de f?

¿Qué puedes decir sobre el dominio de un cociente de funciones?

2.2. VISUALIZACIÓN DE LAS PROPIEDADES DE UNA FUNCIÓN.

Considera las funciones f y g que se han definido en esta práctica, junto con h(x)= log (3- | 2x – 5 |). A la vista de sus gráficas, completa el siguiente cuadro:

	f(x)	g(x)	h(x)
Dominio			
Imagen			
Cota inferior			
Cota superior			
Creciente en			
Decreciente en			
Raíces en			
Máximos en x=			
Mínimos en x=			

PRÁCTICA 3: FUNCIONES POLINÓMICAS

Duración: 2 horas

3.1. PENDIENTE DE UNA RECTA

a) Consideramos la recta F(x) = -2x + 3. Para valores arbitrarios *a* y *b* de la abcisa x, calcula la pendiente entre los dos puntos correspondientes, es decir, simplifica la expresión: $\dfrac{F(b) - F(a)}{b - a}$

a.1) ¿Por qué no depende de a y b?

a.2) ¿Qué relación tiene la pendiente con la ecuación de la recta?

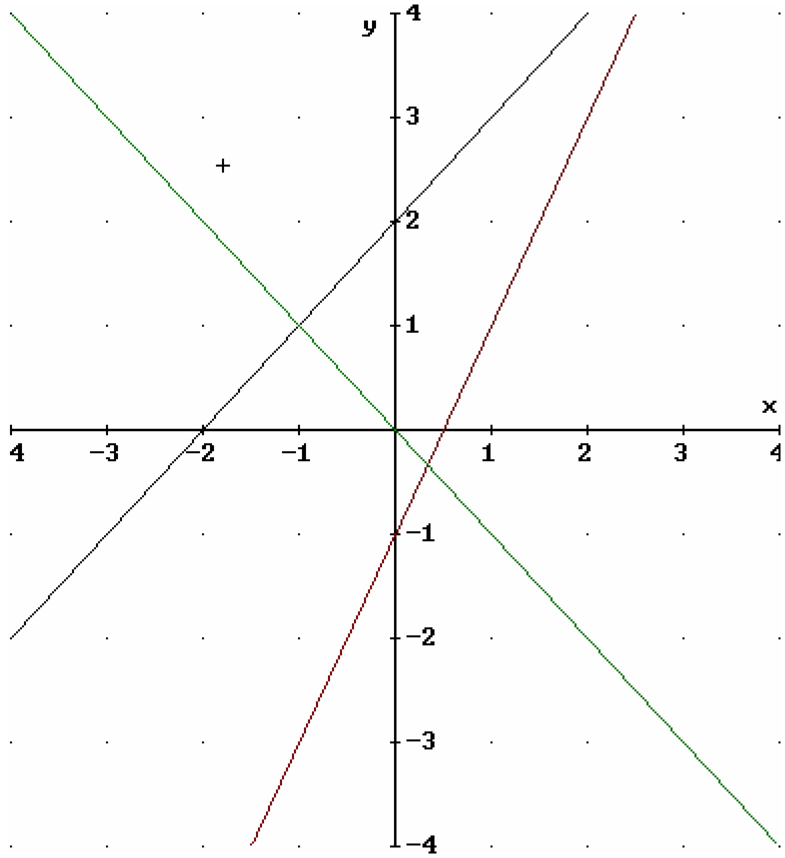
a.3) ¿Es F una función creciente o decreciente?

b) Halla la ecuación de una recta R que pase por el punto P(-2, -1) y tenga:

Pendiente $\frac{1}{2}$	:	R =
Pendiente –2	:	R =
Pendiente 0	:	R =

c) ¿ Cómo influyen el signo y el valor absoluto de la pendiente en el crecimiento de la función?

d) Dibuja, con tu asistente matemático, el dibujo siguiente, determinando previamente la pendiente de cada una de las rectas.



3.2.POLINOMIOS DE GRADO 2

a) Representa gráficamente algunos polinomios de segundo grado, y a la vista de los resultados, contesta a las siguientes preguntas:

a.1. ¿Qué figura es la gráfica de un polinomio de segundo grado?

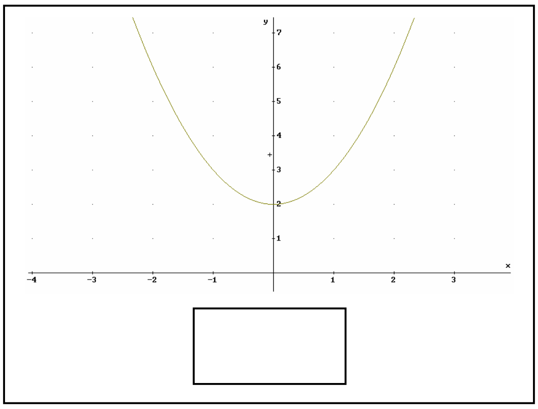
a.2. ¿Está acotada superior e inferiormente?

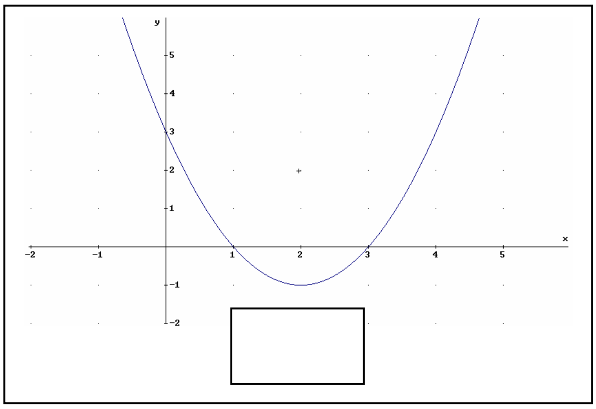
a.3. ¿De qué depende el que esté acotada?

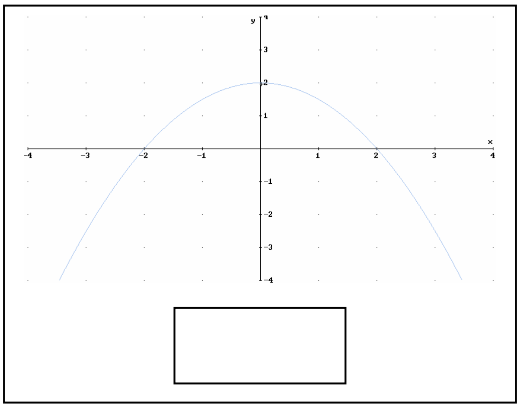
a.4. ¿Cuántos puntos de corte con el eje de abcisas presenta la gráfica de un polinomio de grado dos?

a.5. Pon un ejemplo de cada una de las situaciones que podemos encontrarnos.

b) Para cada una de las siguientes gráficas encuentra el polinomio de segundo grado que la define analíticamente.







3.3. GRÁFICAS DE POLINOMIOS DE GRADO TRES.

a) Representa gráficamente $p(x) = x^3-x^2-2x$. A la vista de la gráfica, responde a las siguientes preguntas, comprobando luego con tu asistente matemático, la validez de las respuestas:

a.1. ¿Cuánto vale $\lim\limits_{x \to +\infty} p(x)$?

a.2. ¿Cuánto vale $\lim\limits_{x - +\infty} p(x)$?

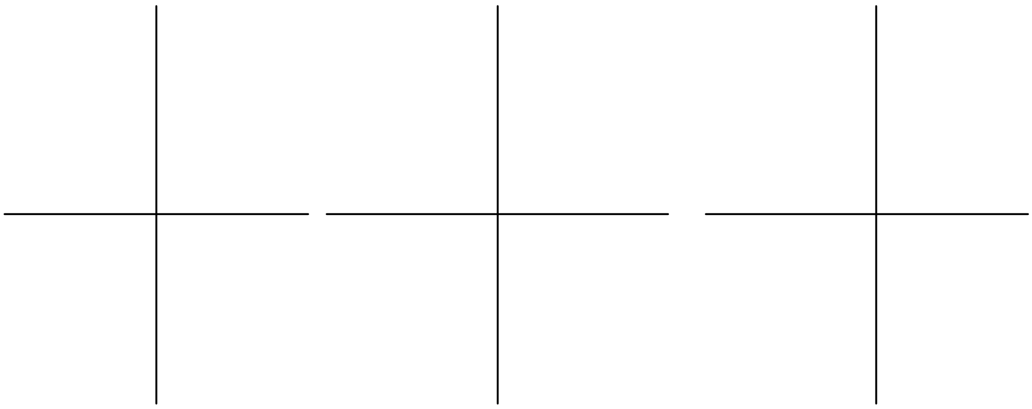
a.3. Determina las soluciones de la ecuación P(x) = 0.

a.4. ¿Cuál es la factorización de P(x)?

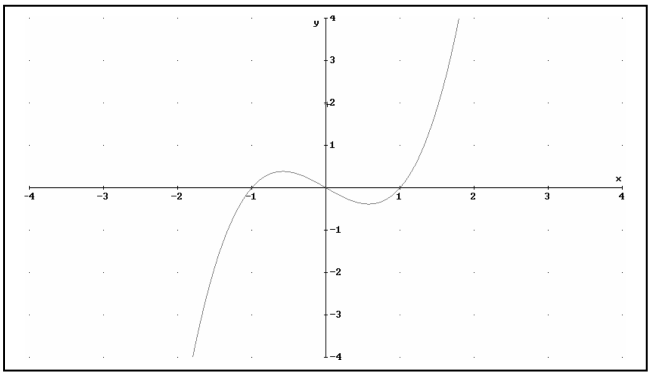
b) Inventa 4 polinomios de tercer grado y represéntalos gráficamente. Según los resultados de las gráficas rellena la siguiente tabla:

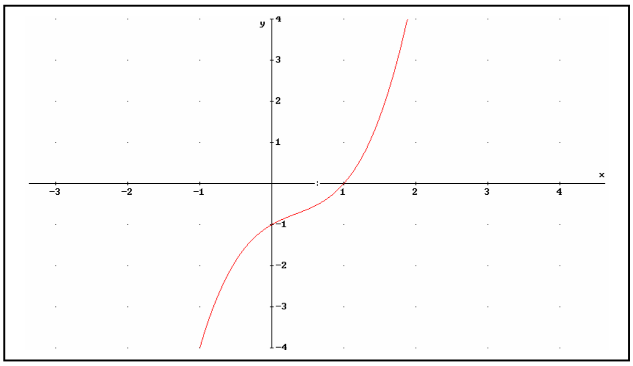
P(x)				
$\lim\limits_{x \to \infty} P(x) =$				
$\lim\limits_{x \to -\infty} P(x) =$				
nº raíces reales				
nº extremos relativos				
nº ptos. de inflexión				
¿Tiene extremos absolutos?				

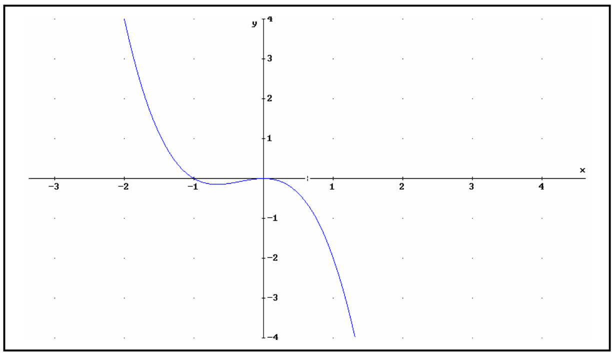
c) Esboza 3 posibles gráficas de polinomios de grado 3 (que se diferencien en número de raíces, de extremos relativos o en su comportamiento cuando x se acerca a ∞)



d) Inventa un polinomio de grado tres cuya gráfica se parezca a cada una de las tres siguientes:







e) Determina gráficamente las soluciones de la ecuación x^3-20x^2-1 = 0

f) ¿Puedes encontrar un polinomio de grado tres que no se anule en ningún punto?. ¿Por qué?

3.4. POLINOMIOS DE GRADO 4

a) Representa gráficamente el polinomio P(x) = x^4+x^3-x2-x y responde a las siguientes preguntas:

a.1. ¿Cuánto es $\lim_{x\to+\infty} P(x) = ?$

a.2. ¿Cuánto es $\lim_{x\to-\infty} P(x) = ?$

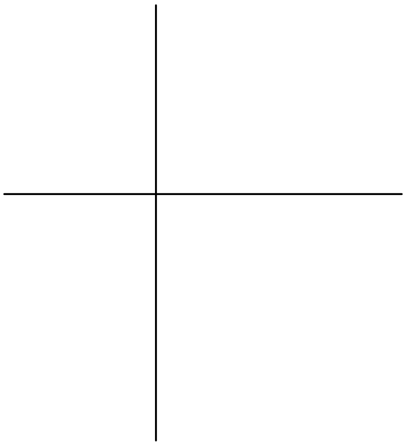
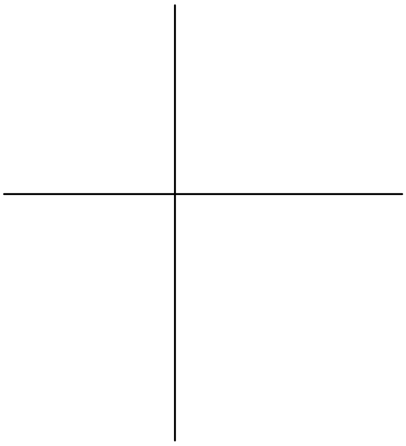
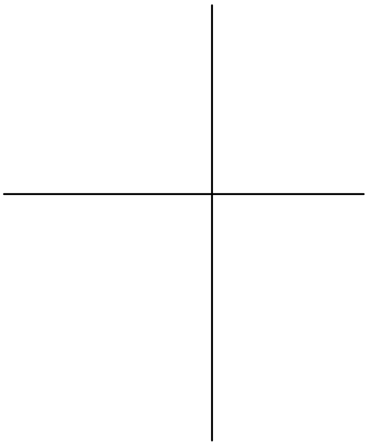
a.3. Determina las soluciones de la ecuación P(x) = 0.

a.4. ¿Cuál es la factorización de P(x)?

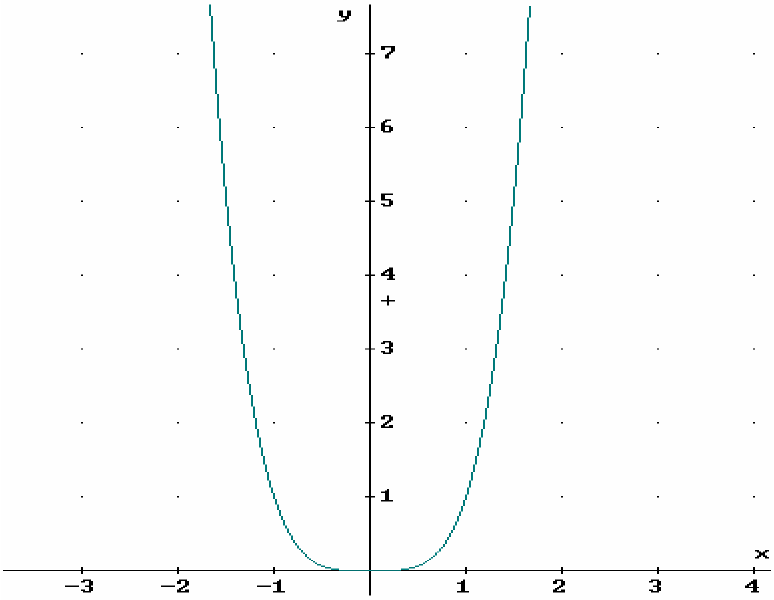
b) Inventa 4 polinomios de grado 4 y represéntalos gráficamente. A la vista de las gráficas, rellena la siguiente tabla:

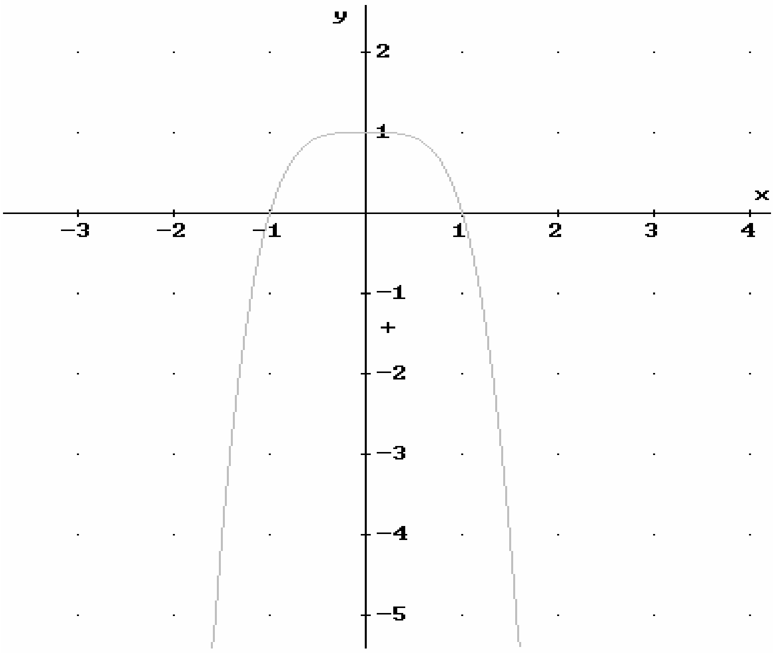
P(x)				
$\lim\limits_{x \to \infty} P(x)$				
$\lim\limits_{x \to -\infty} P(x)$				
nº de raíces reales				
nº de extr. relativos				
nº ptos. inflexión				
¿Tiene extremos relativos?				

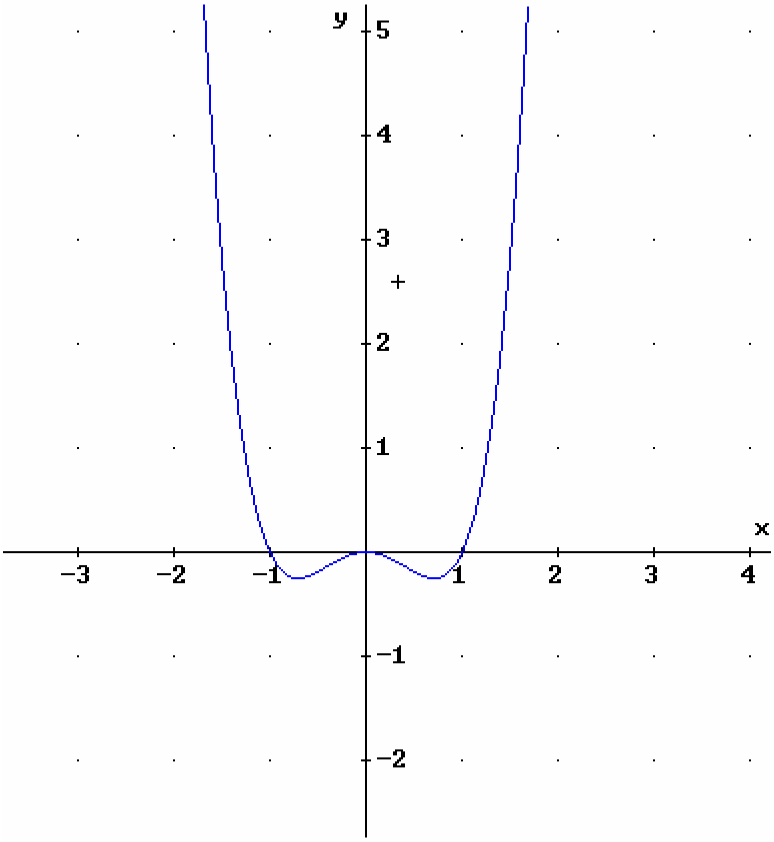
c) Esboza tres posibles gráficas de polinomios de grado 4 (que se diferencien en número de raíces, de extremos relativos o en su comportamiento cuando x se acerca a ∞):

d) Inventa polinomios de grado 4 cuyas gráficas se parezcan a cada una de las tres siguientes:


y
7
6
5
4
3
2
1
x
−3
−2
−1
1
2
3
4


y
2
1
x
−3
−2
−1
1
2
3
4
−1
−2
−3
−4
−5



3.5. POLINOMIOS DE GRADO 5

a) Traza 4 polinomios de grado 5. A la vista de las gráficas, y usando algunos conocimientos sobre polinomios, intenta enunciar alguna regla general sobre los polinomios de grado 5, en particular sobre los siguientes aspectos.

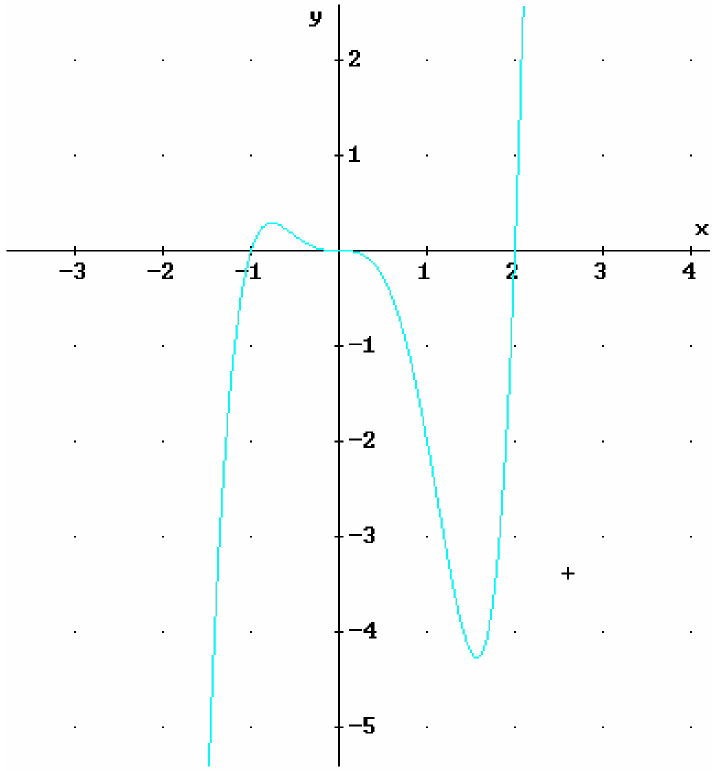
- Nº raíces reales:

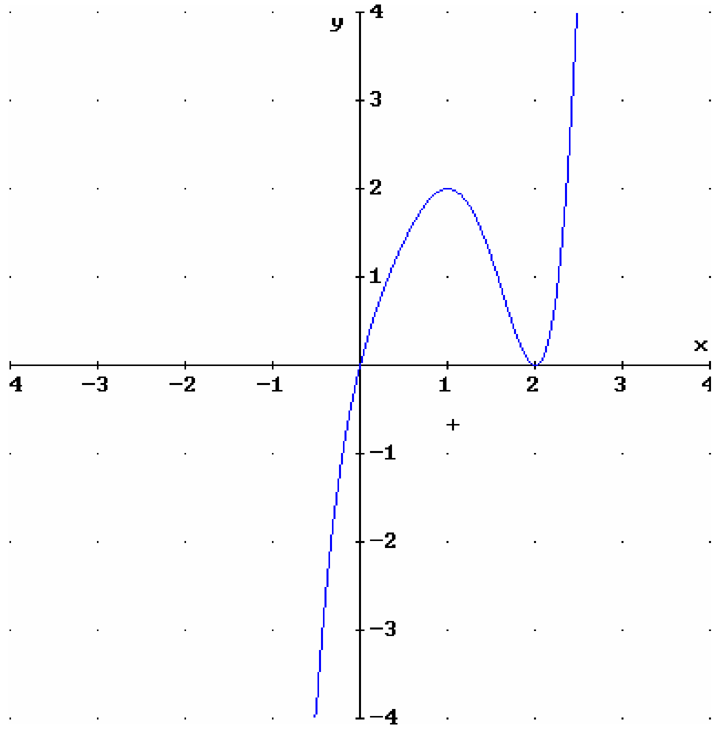
- Nº de extremos relativos:

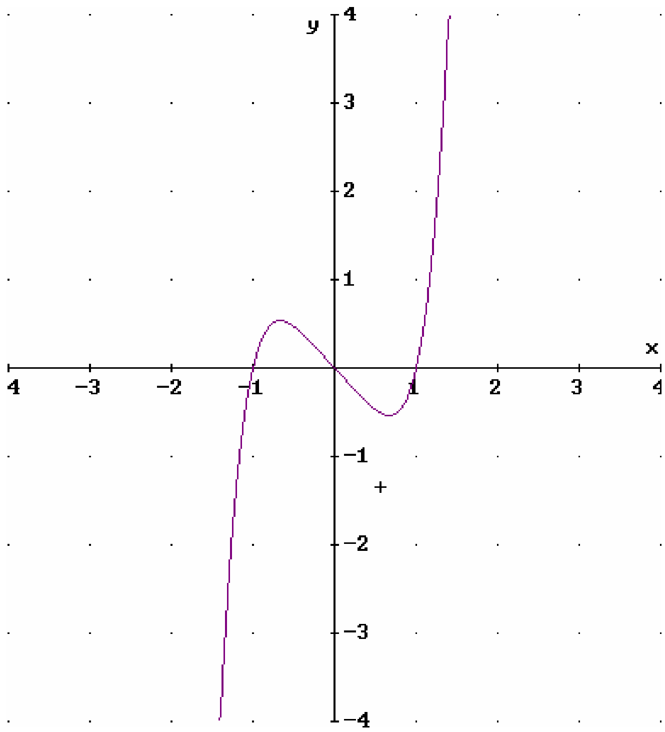
- Nº de puntos de inflexión:

- ¿Tiene la función el mismo signo cuando la x se acerca a +∞ que cuando se acerca a -∞?

b) Busca polinomios de grado 5 cuyas gráficas se parezcan a las siguientes:




y
4
3
2
1
x
4
−3
−2
−1
1
2
3
4
+
−1
−2
−3
−4


y
4
3
2
1
x
4
−3
−2
−1
1
2
3
4
−1
+
−2
−3
−4

PRÁCTICA 4: FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Duración: 2 horas

4.1. TRANSFORMACIONES EN LA FUNCIÓN SENO.

Consideramos la función f(x) = sen x

a) Representa gráficamente f(x), f(x)+2 y f(x) – 1.

a.1. ¿Cómo afectan las transformaciones del tipo f(x) + a a la *situación* de la gráfica en el plano?

¿Cómo afectan al *período* de la función?

a.2. ¿Cómo influye que a sea positivo o negativo?

b) Representa gráficamente ½ f(x), 2f(x) y –3f(x).

b.1.¿Cómo afectan las transformaciones del tipo af(x) a la *forma* de la gráfica en el plano?

¿Cómo afectan al *período* y a la *amplitud* de la función?

b.2. ¿Cómo influye que a sea positivo o negativo?

c) Representa gráficamente f(x), f(x+1/2) y f (x-1)

c1. ¿Cómo afectan las transformaciones del tipo f(x+ a) a la *situación* de la gráfica en el plano?

¿Cómo afectan al *período* y a la *amplitud* de la función?

c.2. ¿Cómo influye que a sea positivo o negativo?

d) Representa gráficamente f(2x), f(-3x) y f(x/2).

d1. ¿Cómo afectan las transformaciones del tipo f(ax) al *período* y a la *amplitud* de la función?

d2. ¿Cómo influye que a sea mayor que 1 o menor que 1?

d3. ¿Cómo influye que a sea positivo o negativo?

d4. Determina a para que la función sen(ax) tenga período 1.

4.2. SIGNIFICADO DEL PERÍODO Y LA AMPLITUD.

Representa gráficamente la función g(x) = -2sen(3x-1)

a) ¿Cuál es su período? ¿Cuál es su amplitud?

P = $\boxed{}$ A = $\boxed{}$

b) Representa junto con g(x) la función f(x) = -2sen (3x). ¿En qué se diferencian?

Indica la magnitud del desplazamiento:

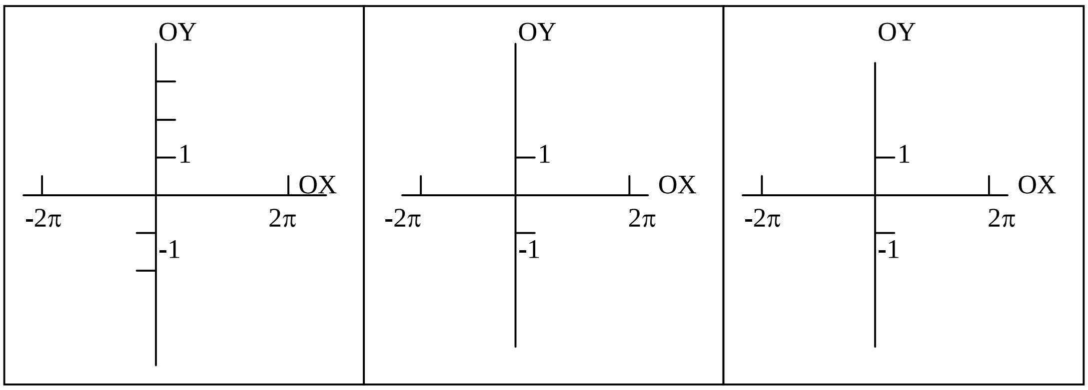
Comprobación:

c) Expresa en función de a y b el período y la amplitud de la función asen(bx).

d) Encuentra una función sinusoidal f(x) de período 2 y amplitud 3, de modo que f(0) = 1.

e) Traza con *DERIVE* la gráfica de cosx y a partir de ella esboza, sin *DERIVE*, las gráficas de las siguientes funciones:

-2cos3x 3cos(x+1) cos(5x+3)



Verifica luego la corrección de las mismas.

4.3. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS.

Representa gráficamente la función h(x) = senx + cosx

a) ¿Podría expresarse h(x) como una función de la forma Asen(bx+c)?

A la vista de la gráfica, da un valor aproximado para A, b y c:

A≈ $\boxed{}$ b ≈ $\boxed{}$ c ≈ $\boxed{}$

b) ¿Podría expresarse h(x) como una función de la forma A'cos(b'x+c')? $\boxed{}$

¿Cuáles serían los valores de A', b' y c'?

A'= $\boxed{}$ b' = $\boxed{}$ c' = $\boxed{}$

¿Cuál es la diferencia entre expresar una función como seno o como coseno?

b) Representa gráficamente la función $h_2(x) = 2\text{sen}x + 3\cos x$.

c1. ¿Es una función periódica?

En caso afirmativo, ¿cuál es su período?

c2. ¿Se puede expresar como Asen(bx+c)?

En caso afirmativo, calcula A, b y c: $h_2(x) = \boxed{\quad \text{sen}(\quad x + \quad)}$

c) Representa gráficamente $h_3(x) = \text{sen}2x + \cos 3x$ y $h_4(x) = \text{sen}4x + \cos 4x$.

d1. ¿Son funciones periódicas?

En caso afirmativo, ¿cuál es su período?

d2. ¿Se pueden expresar como Asen(bx+c)?

¿Por qué?

PRÁCTICA 5: FUNCIONES EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA.

Duración: 1 hora

5.1. FUNCIONES EXPONENCIALES

a) Representa con *DERIVE* , las gráficas de las funciones: 4^x, $(3/2)^x$.

¿En qué intervalo se verifica que $4^x > (3/2)^x$?

-

b) Representa ahora las funciones $(1/4)^x$ y $(0.4)^x$.

¿En qué intervalo se verifica que $(1/4)^x < (0.4)^x$?

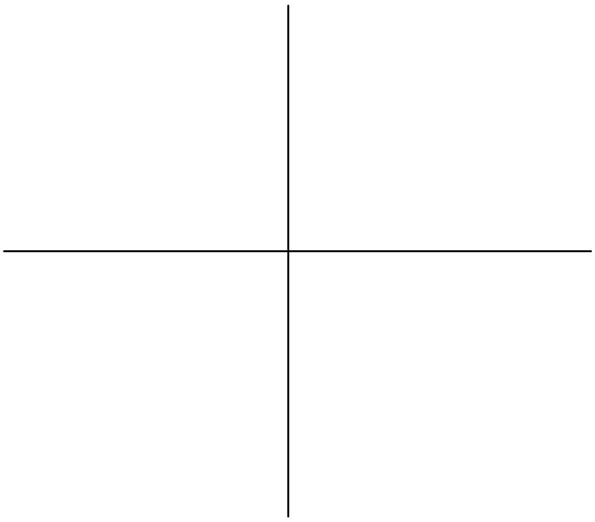
-

c) ¿Qué relación de orden hay entre 4^x, $(3/2)^x$, $(1/4)^x$ y $(0.4)^x$? (Distingue los casos necesarios, según los valores de x.)

d) Ayudándote de las gráficas que necesites, establece ahora la relación de orden entre 4^{-x}, $(3/2)^{-x}$, $(1/4)^{-x}$ y $(0.4)^{-x}$.

e)¿Qué relación hay entre las funciones 4^x, $(1/4)^x$, 4^{-x} y $(1/4)^{-x}$?

e) Se trata ahora de generalizar las propiedades gráficas y de orden de las funciones exponenciales. Para ello, esboza las gráficas de a^x, b^x y c^x, si $a < 1 < b < c$, especificando cuál es cuál (a, b y c son valores generales que verifican las condiciones que se indican) (ATENCIÓN, aquí *DERIVE* ya no tiene nada que hacer).



5.2. FUNCIÓN LOGARÍTMICA.

Traza con *DERIVE* la gráfica de la función $h(x) = \log(\frac{x^3}{24} - \frac{x^2}{8} - \frac{5x}{12} + 1)$.

a) A la vista de la gráfica, indica el dominio de h:

-

b) Estudia el signo y las raíces de $\frac{x^3}{24} - \frac{x^2}{8} - \frac{5x}{12} + 1$

$$\frac{x^3}{24} - \frac{x^2}{8} - \frac{5x}{12} + 1 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^3}{24} - \frac{x^2}{8} - \frac{5x}{12} + 1 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^3}{24} - \frac{x^2}{8} - \frac{5x}{12} + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

¿Están en el dominio de h las soluciones de $\frac{x^3}{24} - \frac{x^2}{8} - \frac{5x}{12} + 1 = 0$?

¿Qué relación tiene el signo de $\frac{x^3}{24} - \frac{x^2}{8} - \frac{5x}{12} + 1$ con el dominio de h(x)?

c) ¿Qué se puede decir sobre el dominio de una función del tipo log(p(x)) siendo p(x) una función cualquiera?

d) Factoriza el polinomio $\frac{x^3}{24}-\frac{x^2}{8}-\frac{5x}{12}+1$:

$\frac{x^3}{24}-\frac{x^2}{8}-\frac{5x}{12}+1 =$

¿Cuál es el dominio de log (x-4) + log (x-2) + log (x+3) – log(24)?

¿Cuándo es cierto que h(x)= log (x-4) + log (x-2) + log (x+3) – log(24)?

¿Es cierto que log(xy) = log x + log y para todo x, y$\in \Re$?

Justifica la respuesta.

PRÁCTICA 6: LÍMITES Y CONTINUIDAD.

Duración: 3 horas.

6.1. EL CONCEPTO DE LÍMITE.

Representa gráficamente con *DERIVE* la función $f(x) = e^{1/\log(x)}$.

a) A la vista de la gráfica, indica el valor de los siguientes límites:

$\lim_{x\to 0^-} f(x)$	$\lim_{x\to 0^+} f(x)$	$\lim_{x\to 0} f(x)$	$\lim_{x\to 1^-} f(x)$	$\lim_{x\to 1^+} f(x)$	$\lim_{x\to 1} f(x)$	$\lim_{x\to +\infty} f(x)$

b) Calcula ahora los límites anteriores con *DERIVE*, bien pulsando el menú Cálculo, límites, ó bien pulsando el botón que tiene escrita la palabra lim.

¿Hay algún resultado que no coincida con los de a)?

c) Basándote en la información obtenida y reflexionando sobre ella, indica la respuesta "definitiva" sobre los siguientes límites:

$\lim_{x\to 0} f(x)$	$\lim_{x\to 1} f(x)$	$\lim_{x\to +\infty} f(x)$

De los límites anteriores, ¿cuál/es *DERIVE* "no hace bien"?

¿Cuál puede ser el motivo? (Se puede averiguar analizando el dominio de f y calculando con *DERIVE* algún valor numérico, como f(-0,1))

6.2. CÁLCULO DE LÍMITES.

a) Indica el valor de los siguientes límites, comprobando con *DERIVE* la corrección del resultado:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-3x}{x^3-4x}= \qquad \lim_{x\to 0}\frac{2x^3-3x}{x^3-4x}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}= \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}= \qquad \lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-4x+3}{x^3-3x+2}= \qquad \lim_{x\to 0}\frac{x^4-4x+3}{x^3-3x+2}= \qquad \lim_{x\to 1}\frac{x^4-4x+3}{x^3-3x+2}=$$

b) Para la función $f(x) := \dfrac{x^3-x}{p(x)}$, busca en cada caso el denominador p(x) para que se verifique el resultado:

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 2$	p(x) =
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$	p(x) =
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$	p(x) =

6.3. CONTINUIDAD.

Define la función $f(x) = \dfrac{\text{sen}\, x}{x}$

a) Calcula f(1) y f(0). ¿Qué ocurre?

b) Define f(0) para que f sea continua en x=0, f(0) = $\boxed{}$

c) Representa, con *DERIVE*, la gráfica de f e indica el valor de los siguientes límites:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Comprueba los resultados calculándolos con Cálculo-límites.

d) ¿Por qué $\lim_{x\to 0} f(x)$ no es ∞ a pesar de que su denominador tiende a 0?

e) ¿Existe $\lim_{x\to +\infty} \operatorname{sen}(x)$? $\boxed{}$

Si embargo, ¿por qué existe $\lim_{x\to +\infty} f(x)$? (para contestar, puede ser úitl la representación gráfica de f(x) junto con las funciones 1/x y –1/x, en escala x:5, y :0.5)

f) Encuentra dos fucniones trigonométricas $h_1(x)$ y $h_2(x)$ tales que no exista su límite cuando $x\to +\infty$, y que

f1. $\lim_{x\to +\infty} h_1(x)\dfrac{1}{x^2} = 0$ $\qquad$ $h_1(x)=$ $\boxed{}$

f2. No existe $\lim_{x\to +\infty} h_2(x)\dfrac{1}{x^2}$ $\qquad$ $h_2(x)=$ $\boxed{}$

6.4. CONTINUIDAD Y ASÍNTOTAS.

Representa gráficamente la función f(x) = $\dfrac{3x^4 - 10x^3 - 27x^2 + 82x - 24}{10(x-3)(x-2)}$

a) A la vista de la gráfica, indica los valores de los siguientes límites:

$\lim_{x\to -\infty} f(x)$	$\lim_{x\to 2^-} f(x)$	$\lim_{x\to 2^+} f(x)$	$\lim_{x\to 3^-} f(x)$	$\lim_{x\to 3^+} f(x)$	$\lim_{x\to +\infty} f(x)$

b) Comprueba dichos resultados con Calculo-Límites.

c) ¿Cuánto vale $\lim_{x\to 3} f(x)$? $\boxed{}$ ¿ Y f(3)? $\boxed{}$

¿Es continua f(x) en x=3? $\boxed{}$

¿Por qué? $\boxed{}$

d) ¿Cuánto vale $\lim_{x\to 2} f(x)$? $\boxed{}$ ¿Y f(2)? $\boxed{}$

¿Es continua f(x) en x=2?

¿Por qué?

d) ¿Por qué no se comporta f(x) de la misma forma en torno a x=2 y x=3 si en el denominador aparecen factores semejantes (x-2) y (x-3)?

6.5. Asíntotas verticales

Se considera la función $f(x) = \log(6x^2+5x-4)$. Traza la gráfica de f e indica a la vista de ésta, si f tiene asíntotas verticales. En caso afirmativo, determina dichas asíntotas y compruébalo calculando los límites laterales necesarios (no será válido un resultado del tipo 1/0 al comprobar un límite)

Asíntotas	Comprobación
x =	$\lim\limits_{x\to} f(x) =$
x =	$\lim\limits_{x\to} f(x) =$

Si p(x) es un polinomio, ¿qué puede decirse sobre las asíntotas verticales de una función del tipo log(p(x))?

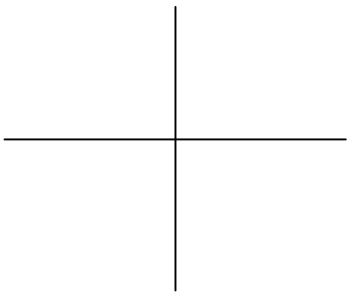
6.6. Asíntotas horizontales y verticales de una función racional.

Se considera la función $f(x) = \dfrac{x^2-4}{p(x)}$. Busca, en cada caso, un polinomio p(x) tal que:

a) f(x) tenga una asíntota horizontal y =-2.

p(x) =

Gráfica de f(x)



Comprobación

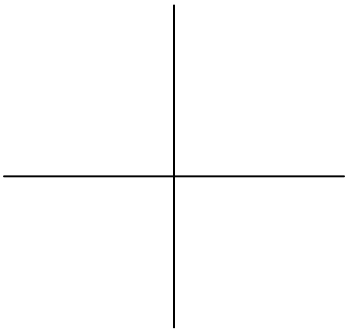
$\lim\limits_{x\to} f(x) =$

$\lim\limits_{x\to} f(x) =$

b) f(x) tenga dos asíntotas verticales x=2, x=-1

p(x) = $\boxed{}$

<u>Gráfica de f(x)</u>



<u>Comprobación</u>

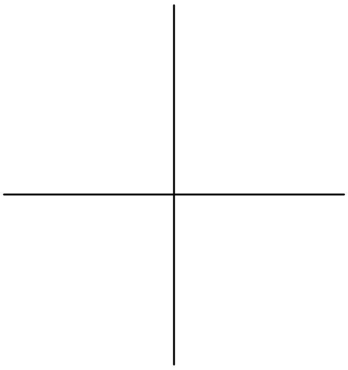
$\lim\limits_{x\to} f(x) =$ $\lim\limits_{x\to} f(x) =$

$\lim\limits_{x\to} f(x) =$ $\lim\limits_{x\to} f(x) =$

c) f(x) tenga una asíntota horizontal y = 0, y una asíntota vertical x = 2

p(x) = $\boxed{}$

<u>Gráfica de f(x)</u>



<u>Comprobación</u>

$\lim\limits_{x\to} f(x) =$ $\lim\limits_{x\to} f(x) =$

$\lim\limits_{x\to} f(x) =$ $\lim\limits_{x\to} f(x) =$

6.7. ASÍNTOTAS OBLICUAS.

Representa gráficamente la función f(x) = $\dfrac{2x^2-6x-5}{3x+1}$.

a) Halla a = $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$: a = $\boxed{}$

b) Representa gráficamente la recta y = ax. ¿Qué relación tiene con la gráfica de f(x)? (Haciendo zoom se puede observar mejor, escala x:5, y:5 por ejemplo)

c) Calcula “a ojo” la distancia entre f(x) y la recta y = ax cuando $x\to\infty$.

Busca un valor b tal que la recta y = ax+b “coincida” gráficamente con f(x) cuando $x\to\infty$. (Representa la recta para los distintos valores de b hasta encontrar una elección válida.)

$b \approx$ $\boxed{}$

d) Calcula $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-ax\right)=$ $\boxed{}$

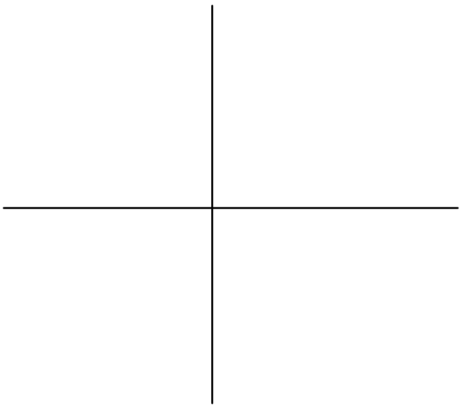
¿Qué relación tiene este valor con el b hallado en c)? $\boxed{}$

¿Cuál es la asíntota oblicua de f(x)? $\boxed{}$

e) Dada g(x) = $\dfrac{x^2-4}{p(x)}$, busca un polinomio p(x) tal que f(x) tenga como asíntota oblicua la recta y = 2x-1.

p(x) = $\boxed{}$

<u>Gráfica de g(x) y de y=2x-1</u>



<u>Comprobación</u>

$a = \lim\limits_{x\to ?}$ $\boxed{}$ = $\boxed{}$

$b = \lim\limits_{x\to ?}$ $\boxed{}$ = $\boxed{}$

PRÁCTICA 7 : DERIVADAS

Duración : 1 hora.

7.1. DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO.

Representa gráficamente la fucnión f(x) = x^2-1.

a) Sitúa la cruz de la pantalla gráfica en el punto (1,0) (Utiliza [F9] hasta, por ejemplo, la escala x:0.001 y:0.001).

Según nos acercamos a (1, 0), ¿a qué tipo de función se va pareciendo la gráfica?

Busca con la cruz las coordenadas de algún punto de la gráfica próximo a (1, 0), por ejemplo x = 1.0005. Halla la pendiente entre los dos puntos.

Pendiente entre (1, 0) y (1.0005,   ) : $\boxed{}$

Calcula f'(x) y hall f'(1).   f'(1) = $\boxed{}$

¿Hay alguna relación entre loe resultados?

b) Vuelve a poner la gráfica con escala x:1, y:1.

Realiza los mismos cálculos del apartado anterior con el punto (-2, 3).

Pendiente entre (-2, 3) y (,   ) : $\boxed{}$ f'(-2) = $\boxed{}$

Cerca del punto (1, 0), ¿la función f es creciente o decreciente? $\boxed{}$

¿Y cerca de (-2, 3)? $\boxed{}$

¿En cuál de los dos casos la función varía más rápidamente? $\boxed{}$

c) Representa ahora la función g(x) = $|x^2-1|$. (Borra previamente la gráfica de f). Acercándose, como en a), al punto (1, 0), responde a las siguientes cuestiones:

¿Qué aspecto tiene en este caso la gráfica en las proximidades de (1, 0)?

Calcula g'(x) y hall g'(1) = $\boxed{}$

¿Tiene este resultado alguna relación con lo que se observa en la gráfica?

d) Basándote en lo observado, explica el significado geométrico de la derivada de una función en un punto.

7.2. LA TANGENTE APROXIMA A LA CURVA

En este ejercicio se va a utilizar la tangente a una función en un punto para *aproximar* los valores de esa función *cerca* de dicho punto.

Se considera la función h(x) = log (x) . Calcula la ecuación de la recta tangente a h(x) en x = 1.

T(x) = $\boxed{}$

Representa gráficamente la función y su recta tangente.

A continuación se estudiará cuándo se puede aproximar el valor de log(x) por el valor de su tangente en el punto x = 1.

a) A la vista de las gráficas, ¿para qué valores de x son muy parecidos los valores de log(x) y los de T(x)?

b) Calcula con *DERIVE* los valores que se piden en la tabla:

Una forma de hacerlo más rápido es utilizando la función VECTOR, por ejemplo:

VECTOR([x, logx, ABS(logx-T(x))], x, 0, 2, 0.2).

(Usa Aproximar para obtenerlos, o bien cambia a modo aproximado)

x	logx	T(x)	$\lvert$logx-T(x)$\rvert$
0			
0.2			
0.4			
0.6			
0.8			
1			
1.2			
1.4			
1.6			
1.8			
2			

¿Se confirma la respuesta dada en a)?

¿Qué significado tiene decir que la tangente a una función en un punto es una aproximación *local* de dicha función?

PRÁCTICA 8: DERIVADAS Y EXTREMOS DE UNA FUNCIÓN.

Duración: 1 hora

8.1. PUNTOS CRÍTICOS.

Representa gráficamente la función: $a(x) = \left|x^3e^{-x^2}(3-2x^2)+\frac{2}{3}\right|$

a) A la vista de la gráfica de a(x), responde a las siguientes cuestiones:

¿En qué puntos debería anularse la derivada de a(x)? (se puede dar valores aproximados usandos la cruz, o bien usar la agudeza visual)

¿En qué puntos no debería existir la derivada de a(x)?

b) Calcula a'(x) y represéntala gráficamente junto con a(x). A la vista de la gráfica de a'(x) responde a las cuestiones:

¿En qué puntos se anula a'(x)?

¿En qué puntos no existe a'(x)?

¿Coinciden con los señalados en a)? ☐

¿Qué se puede asegurar sobre el comportamiento de una función en un punto en el que la derivada es cero? (Señala la/s respuesta/s correcta/s).

☐ Ese punto es un extremo (máximo o mínimo) de la función.

☐ En ese punto la tangente es horizontal.

☐ Ese punto es un extremo o la función vale cero.

c) Halla los puntos x en los que a(x) tiene máximos relativos.

¿Tiene a(x) algún máximo absoluto?

En caso afirmativo, ¿en qué punto/s se alcanza? x =

¿Cuál es el máximo valor que toma la función a(x)? (da un valor aproximado mejor que el valor exacto)

d) Halla los puntos en donde a(x) tiene mínimos relativos:

¿Tiene a(x) algún mínimo absoluto?

En caso afirmativo: ¿En qué punto/s lo alcanza? x =

¿Cuál es el mínimo valor que toma la función a(x)?

e) ¿Se puede asegurar que todos los puntos críticos de una función son extremos de dicha función? Justifica la respuesta:

¿Se puede asegurar que todos los extremos de una función son puntos en donde la derivada se hace cero? Justifica la respuesta:

Conociendo sólo la derivada de una función, ¿cómo se puede determinar si un punto crítico es máximo, mínimo o ninguna de las dos cosas?

8.2. SEGUNDA DERIVADA Y PUNTOS DE INFLEXIÓN.

Representa gráficamente la función b(x) = $x^6e^{-x^2}$

a) A la vista de la gráfica de b(x), ¿en qué puntos se debería anular la segunda derivada de b(x)?

b) Calcula b''(x) y represéntala gráficamente junto con b(x). ¿En qué puntos se anula b''(x)?

¿Coincide con los señalados en a)? $\boxed{\quad}$

c) Halla los puntos de inflexión de b(x):

d) ¿Se puede asegurar que todos los puntos que anulan la segunda derivada de una función son puntos de inflexión de dicha función?. Justifica la respuesta:

Conociendo sólo la segunda derivada de una función, ¿cómo se puede determinar si un punto que la hace cero es un punto de inflexión o no?

8.3. EXTREMOS RELATIVOS Y ABSOLUTOS.

Representa gráficamente $c(x) = x^2e^{-x^2}(4x^4 - 16x^2 + x + 9)$

a) A la vista de la gráfica, indica en qué puntos la función tiene extremos relativos:

Máximos relativos en :

Mínimos relativos en :

b) Representa gráficamente c(x) sólo para $x \in [0, +\infty)$. (Para ello basta pedir el dibujo sobre la expresión; IF(x>=0, c(x)).

c) Estudia si existen máximo y mínimo absoluto de c(x) en $[0, +\infty)$ y calcúlalos cuando existan:

	Máximo absoluto	Mínimo absoluto
Existe (SI/NO)		
Se alcanza en x =		
El valor de c es c(x) =		

c) Representa gráficamente c(x) sólo para $x \in [-1, 1]$. Estudia si existen máximo y mínimo absoluto de c(x) en [-1, 1] y calcúlalos cuando existan:

	Máximo absoluto	Mínimo absoluto
Existe (SI/NO)		
Se alcanza en x =		
El valor de c es c(x) =		

¿Cambiaría la respuesta si se pidieran los extremos absolutos en el intervalo (-1, 1)?

En caso afirmativo, indica cuál sería la respuesta para ese intervalo:

	Máximo absoluto	Mínimo absoluto
Existe (SI/NO)		
Se alcanza en x =		
El valor de c es c(x) =		

Justifica la respuesta:

PRÁCTICA 9: ESTUDIO ANALÍTICO DE UNA FUNCIÓN.

Duración: 1 hora

9.1. ESTUDIO ANALÍTICO DE UNA FUNCIÓN CONOCIENDO SU DERIVADA.

Considera la función c(x) = $x^2e^{-x^2}(4x^4-16x^2+x+9)$ como la derivada de una función que llamaremos Z(x), es decir: Z'(x) = c(x).

Utilizando *solamente* la gráfica c(x) se va a obtener información sobre la función Z(x) (para hallar valores usar la cruz de la pantalla gráfica.)

a) Halla los puntos en los que c(x) = 0:

A partir de ellos y del signo de c(x):

a1. Señala los intervalos de crecimiento y decrecimiento de Z(x):

Z(x) es creciente en:

Z(x) es decreciente en:

a2. Señala los extremos de Z(x):

Z(x) tiene máximos relativos en:

Z(x) tiene mínimos relativos en:

b) Indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento de c(x):

c(x) es creciente en:

c(x) es decreciente en:

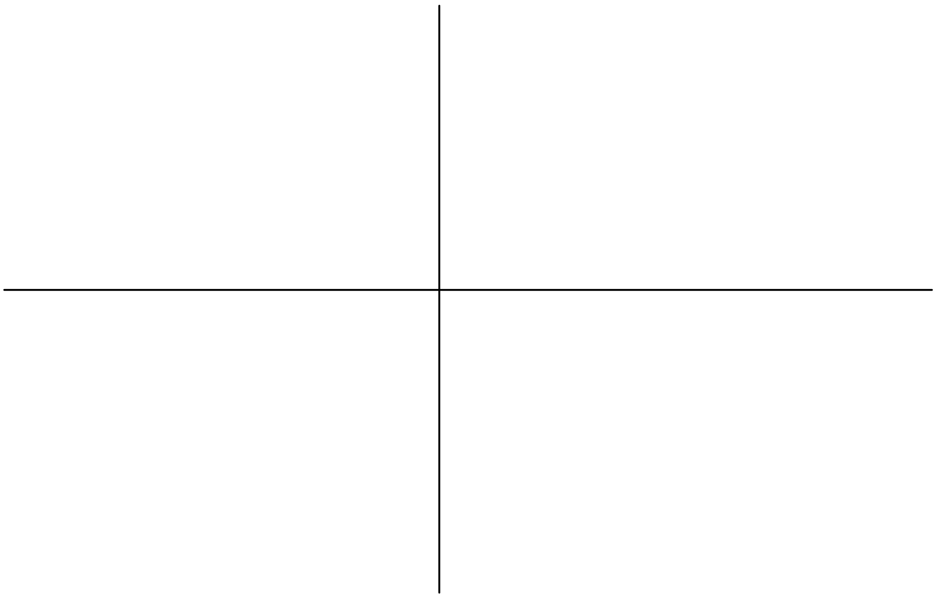
¿Qué relación tiene el crecimiento de c(x) con la concavidad de Z(x)? (recordar que Z'(x) = c(x))

Indica los intervalos de concavidad y convexidad de Z(x):

Z(x) es cóncava en :

Z(x) es convexa en:

c) Esboza una posible gráfica de Z(x):



d) Verifica si es correcta. Para ello simplifica la expresión DIF(c(X9,x,-1), y representa gráficamente el resultado obtenido.

¿En qué se parece a la gráfica esbozada?

¿Es única solución para Z(x)?

Da otro ejemplo de función, Z1(x), tal que Z1’(x) = c(x) y cuya gráfica pase por el punto (0,0):

NOTA: *Observa que al pedir la derivada de orden –1 de c, lo que se pide a DERIVE es que realice el proceso inverso de la diferenciación.*

MATRICES. DETERMINANTES. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

NIVEL

- 2º curso de Bachillerato Logse.

OBJETIVOS

- Trabajar con el programa de cálculo simbólico
- Trabajar y profundizar en los contenidos estudiados sobre matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

- Bloque de álgebra lineal del curriculum de 2º Bachillerato Logse.

MATERIAL Y ORGANIZACIÓN

- Ordenador con retroproyector o similar, *DERIVE* para Windows; posibilidad de realizar la misma sesión en el aula de Informática, siempre con dos alumnos por ordenador
- Duración: 3 sesiones.
- Fichas de trabajo: En la primera sesión se introduce el tema con *DERIVE*, y se trabaja la primera ficha que consta del resumen de los contenidos con *DERIVE*, y los ejercicios de la segunda ficha, que son de matrices. La tercera ficha contiene los ejercicios de determinantes y rangos, y la cuarta ficha trabaja los ejercicios de sistemas de ecuaciones lineales.

DESCRIPCIÓN

- Como siempre, tratamos de ”visualizar” los contenidos , para que estos sean más asimilables. Los alumnos al trabajar con el ordenador, no van a encontrarse con las dificultades de las cuentas, sino que van a poder profundizar en los contenidos.

1. FICHA 1 : LAS MATRICES CON *DERIVE*.

Vamos a introducir las matrices con *DERIVE*. Para ello tenemos que aclarar primero que para *DERIVE*, una matriz es un vector de vectores de la misma dimensión, entendiendo cada uno de estos vectores como las filas de la matriz.

Entonces, tenemos varias formas de introducir una matriz con *DERIVE*:

1. **Editar–Expresión**: escribimos el vector de vectores, utilizando los corchetes.
2. **Editar-Vector**: cada una de las componentes del vector será otro vector, concretamente cada una de las filas de la matriz.
3. **Editar-Matriz**: elegimos las dimensiones de la matriz, y colocamos cada una de las componentes en su lugar.
4. **Botón Introducir una matriz**: de la misma forma que en el punto 3.

De todas estas formas, las más simples son las dos últimas, pero no está de más conocer todas las posibilidades que tiene el programa.

Podemos ponerle nombre a las matrices, utilizando el menú: editar-expresión: **Editar–Expresión**: A:=(copiando con F3 la matriz a la que queremos ponerle el nombre y hemos resaltado)

OPERACIONES CON MATRICES Y CON *DERIVE*:

- Para sumar matrices (siempre de la misma dimensión): +
- Producto de matrices (columnas de la primera = filas de la segunda): .
- Producto de un escalar por una matriz: basta escribir uno a continuación del otro.
- Para obtener potencias de exponente entero de una matriz cuadrada: ^: **Editar–Expresión**: A^3=
- Para hallar la inversa actuaremos de la forma anterior.
- La matriz traspuesta se introduce con el acento grave: `

FUNCIONES PROPIAS DE *DERIVE* PARA MATRICES:

- **ELEMENT (A, i, j)** : Nos da el elemento de la fila i y de la columna j de la matriz A.
- **ELEMENT (A, i)**: Nos da la fila i de la matriz A.
- **TRACE (A)**: Nos da la traza de la matriz A
- **IDENTITY_MATRIX(n)**: nos introduce la matriz identidad de orden n.
- **ROW_REDUCE(A)**: nos da la forma escalonada reducida de la matriz A
- **DET(A)**: nos halla el determinante de A.
- **DELETE_ELEMENT(A, k)** suprime de la matriz A la fila k-ésima.
- **APPEND(A, vector con las filas a añadir)**: añade filas a una matriz A. Las filas se añaden por abajo.

Todas estas funciones las introduciremos con el comando **Editar-Expresión**.

Al final de esta ficha tenemos una copia de estas funciones aplicadas a una matriz.

DERIVE tiene unos ficheros MTH de funciones que se han creado para determinados temas. Concretamente el fichero VECTOR.MTH, contiene funciones relacionadas con las matrices que podemos utilizar siempre que abramos este fichero, o como se dice en el lenguaje derivero, siempre que *DERIVE* lea el fichero. Para esto pinchamos en el menú Archivo:

Archivo– Leer – MTH – Vector.

FUNCIONES ÚTILES DEL FICHERO VECTOR:

- **PIVOT (A,i,j)**: permite aplicar una paso del método de Gauss eligiendo el pivote (posición i,j.). Aplicándola sucesivamente, podemos escribir la forma escalonada de A.
- **ADJOINT(A)**: halla la matriz adjunta de la traspuesta de A.
- **RANK(A)**: halla el rango de la matriz.
- **MINOR(A, i, j)**: nos da la matriz resultante de eliminar la fila i y la columna j de la matriz A.
- **APPEND_COLUMNAS(A,B)** : añade las columnas de B a A.
- **COFACTOR(A, i, j)** es el numerador del elemento i, j de la inversa de la matriz cuadrada A. El elemento correspondiente de la inversa es este numerador dividido por DET(A). COFACTOR le permite calcular la matriz inversa elemento a elemento.

2. FICHA 2 : EJERCICIOS CON MATRICES.

Duración: 1 sesión

1. Sean las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}3&1\\1&1\\1&1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&2&1&-1\\1&1&1&2\end{pmatrix}\quad \text{y}\quad C=\begin{pmatrix}1&0&1&2\\1&-1&1&0\\2&1&1&0\end{pmatrix}$$

Hallar:

a) D = (AB+C)T

b) E = BTAT+CT

c) Comparar D y E, ¿qué observamos?. ¿Por qué?

2 Una *matriz cuadrada A* se denomina simétrica si A = A^T y antisimétrica si A =- A^T.

a) Propón una matriz A simétrica de orden 3 y comprueba que los es. Haz lo mismo pero con una antisimétrica.

b) Dada la matriz : $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\6&-2&1\end{pmatrix}$

b1) Calcula B = $\dfrac{A+A^T}{2}$, C=$\dfrac{A-A^T}{2}$, B+C

b2) ¿Qué observas?

b3) Comprueba que, en general, toda matriz A se puede expresar como suma de una matriz simétrica B y otra C antisimétrica.

3 Busca una matriz simétrica A de modo que:

$$\begin{bmatrix}x&y&z\end{bmatrix}A\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=9x^2+4y^2+z^2-xy+6xz+2yz$$

4 Expresa los siguientes sistemas como producto de matrices AX=B, siendo:

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{ó} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

a) $\begin{cases} 6x - 4y = 2 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x \qquad - z = 2 \\ 4x - y + 2z = 7 \\ 7x + 2y - z = -3 \end{cases}$

Calcula X despejando en la ecuación AX=B

5 Sea $A=\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcula A^2 y A^3.

b) Deduce sin cálculo A^{-1}. Compruébalo con *DERIVE*.

6. Dadas las matrices :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad y \quad N = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & a & -2 \end{pmatrix}$$

a) Calcula la forma escalonada reducida por filas de las matrices M y N, usando la función ROW_REDUCE.

b) Sustituye en la matriz N el parámetro a por 6 y calcula de nuevo su forma escalonada reducida. ¿Es coherente este resultado con el anterior?

c) Utiliza ahora la función PIVOT(N, i, j) para escribir la matriz N en forma escalonada e indica dónde puede estar el punto que da lugar a la discrepancia de los resultados.

NOTA: Observa que ROW_REDUCE trabaja con los parámetros de manera simbólica sin tener en cuenta los casos en que un denominador que contenga un parámetro puede anularse. Por ejemplo para *DERIVE*, a/a=1, sin tener en cuenta el caso en que a=0.

7. Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

    7.1. Obtén la forma escalonada por filas y la forma escalonada reducida por filas de estas matrices.(Según los valores de a debes obtener las correspondientes matrices escalonadas)

    7.2. Calcula A^{-1} y B^{-1}. ¿Para qué valores de a tiene sentido B^{-1}?

8. Dadas las matrices: $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

    8.1. Calcula $D = P^{-1}MP$

    8.2. Calcula D^n y obtén D^2 y D^{150}.

    8.3. Calcula utilizando los apartados anteriores M^{150}.

3. FICHA 3: EJERCICIOS DE DETERMINANTES, RANGOS.

Duración: 1 sesión

1. Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & -4 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

   a) Calcula det(A) y det(B).

   b) Utiliza la función ROW_REDUCE para calcular su inversa en caso de que exista.

   c) Propón una matriz $A \in M_{3x3}$ $(\Re)$ de modo que la función ROW_REDUCE($A \mid I_3$) tenga el valor ($I_3 \mid B$) o justificar que no puede existir, siendo B la matriz:

$$\text{a)} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{b)} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{c)} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 \\ 2 & k & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

DERIVE nos dará la misma simplificación con la función ROW_REDUCE(A) para cualquier valor de k excepto para uno. ¿Para qué valor de k nos dará un resultado diferente?.

3. Sea la matriz

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ -3 & -6 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 8 & 1 \end{pmatrix}$$

a) ¿P es invertible?. ¿Cuál es la forma escalonada reducida?

b) Encuentra por qué número debemos reemplazar el elemento p_{24} de P para que no sea invertible.

(NOTA: observa como con sólo cambiar un elemento de una matriz, esta deja de ser invertible)

4. Encuentra matrices B tales que A=BC en cada uno de los siguientes casos:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

5. Dada la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -6 \\ 0 & 7 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Calcula det(M)
b) Calcula det(AdjM) sin calcular AdjM ni M^{-1}.
c) Calcula la matriz Adj M sin hacer uso de la función ADJOINT y comprueba el resultado obtenido en el apartado anterior.
d) Utilizando la matriz adjunta calcula la inversa de M y comprueba tu resultado calculándola de otras dos formas.

6. Calcula el determinante de Vandermonde de orden 5:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d & e \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 & e^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 & e^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 & e^4 \end{vmatrix}$$

dando el resultado factorizado.

NOTA: LA función VECTOR(u,k,m,n) simplifica a un vector de n-m+1 elementos al simplificar la expresión u cuando k varía desde m hasta n en saltos de 1.

LA matriz de Vandermonde es un vector de vectores, como toda matriz, teniendo sus filas una forma especial, en nuestro caso son potencias de la fila $[a^k,b^k,c^k,d^k,e^k]$. Si k=0, obtenemos la primera fila, hacemos k=1 y obtenemos la segunda, y así sucesivamente hasta k=4. Luego, podemos con *DERIVE* escribir esta matriz con el comando **Editar-Expresión**:

VECTOR([a^k,b^k,c^k,d^k,e^k],k,0,4)=

y escribiremos la matriz de forma más rápida que con la orden **Editar-Matriz**.

7. Resuelve la ecuación:

$$\begin{vmatrix} x & a & b & c & d \\ a & x & b & c & d \\ a & b & x & c & d \\ a & b & c & x & d \\ a & b & c & d & x \end{vmatrix} = 0$$

A la vista del resultado anterior fijate que podríamos haber conocido sus soluciones sin hacer ningún cálculo, sólo haciendo uso de las propiedades de los determinantes. ¿Cuáles utilizarías?

8. Calcula el rango de la matriz:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & a \\ 3 & 2 & -a & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hazlo de dos formas.

9. Encuentra el valor del parámetro a para que el rango de la matriz:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & a-1 & -2 & 0 & 4 & 2a \\ 1 & 2 & a^2 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 8 & -1 & a+1 & 2a-2 \end{pmatrix}$$

4. FICHA 4: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

1. Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y + 3z + 6t - 3u = 9 \\ -2x + y \quad\quad - t + 4u = 2 \\ 3x - y + 2z + 4t + u = 9 \\ x + 4y - z + 4t - 4u = 4 \end{array}\right\}$$

a) Estúdialo usando el teorema de Rouché-Frobenius.

b) Resuélvelo usando la función ROW_REDUCE.

c) Resuélvelo utilizando la regla de Cramer.

d) Resuélvelo utilizando el comando Resolver

   d1) respecto de las variables x, y, z, t.

   d2) respecto de las variables x, y, z, u.

¿Cuál crees que puede ser el motivo de esta contradicción?.

☞En general el comando Resolver no puede ser fiable cuando el número de ecuaciones es menor que el número de incógnitas. Para evitar resultados incorrectos añadimos ecuaciones ficticias, hasta conseguir un sistema con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas.

En nuestro caso podemos añadir una ecuación como 0.x = 0, y al utilizar el comando Resolver nos da la solución correcta.

2. Estudia según los valores del parámetro a el siguiente sistema y resuélvelo siempre que sea posible:

$$\left.\begin{array}{r} 2x + ay + z = 4 \\ ax + 2y + z = 2 \\ x + y + (a+1)z=3 \end{array}\right\}$$

3. Discutir según los valores de a y b el siguiente sistema y resuélvelo cuando sea posible:

$$\left.\begin{array}{r} x - y + z = 3 \\ 2x - ay + 3z = 4 \\ 3x - 3y + 4z = 7 \\ 5x - (a+b)y + 7z = 8-b \end{array}\right\}$$

4. Determina los valores de a y b, de modo que a sea un número entero, b un número real y el siguiente sistema sea compatible y determinado. Resuélvelo para los valores hallados.

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 1 \\ y + 2z = 9 \\ ax - y + z = 7 \\ ax - 2by = 1 \\ x - az = 8 \end{array}\right\}$$

LAS ECUACIONES DE LA RECTA

NIVEL

Bachiller

OBJETIVOS

- Trabajar las ecuaciones de la recta en la mayoría de las situaciones que se presentan..
- Utilizar un fichero MTH. de *DERIVE*, para poder utilizarlo siempre que queramos, sin necesidad de volver a picar cada vez.
- Comprobación rápida de problemas de clase.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

- La recta en el plano.

MATERIAL Y ORGANIZACIÓN

- Tenemos una explicación, para el profesor del fichero MTH. que podemos modificar.
- La ficha con la explicación de cada función creada, para el trabajo con los alumnos.

DESCRIPCIÓN

No se trata de una práctica de profundización de la materia. Podemos decir que nos sirve para entender el significado de la lectura de un fichero MTH. para *DERIVE*, y de su posterior utilización.

1. ECUACIÓN EN FORMA EXPLÍCITA, Y = AX+B, DE LA RECTA QUE PASA POR DOS PUNTOS DADOS A Y B: D1(X_A,Y_A,X_B,Y_B)

Es una función de cuatro variables. Está definida en una línea. Primero comprueba si la recta es paralela al eje de ordenadas y da la respuesta en la forma x=cte ó y = ax+b.

$$\#1: \quad D1(xa, ya, xb, yb) := IF\left(xa = xb, x = xa, y = \frac{yb - ya}{xb - xa}\cdot(x - xa) + ya\right)$$

Si tratamos, como ejemplo, de hallar la recta que pasa por A(1, 2) y B(5, √2), picaremos:

Editar expresión: D1(1, 2, 5, √2),=

DERIVE nos contestará:

$$\#2: \quad D1(1, 2, 5, \sqrt{2}) = \left(y = \frac{\sqrt{2}\cdot x\cdot(1 - \sqrt{2})}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{5}{2}\right)$$

Podemos practicar con otros ejemplos:

1. D1(1, 2, 1, 5) = (x = 1)
2. D1(2, t, 3, 1-t) = (y = x(1-2t) + 5t – 2)

2 D2(M, X_A, Y_A) : DETERMINA LA ECUACIÓN EXPLÍCITA DE LA RECTA DE PENDIENTE M, Y QUE PASA POR A.

Es una función de tres variables muy sencilla:

$$\#2: \quad D2(m, xa, ya) := y = m\cdot(x - xa) + ya$$

DERIVE utiliza esta función como precedente, pues rápidamente simplifica. Por ejemplo:

$$\#3: \quad D2(1,\ 1,\ 1) = (y = x)$$

$$\#4: \quad D2\left(-\frac{1}{3},\ 4,\ 2\right) = \left(y = \frac{10 - x}{3}\right)$$

$$\#5: \quad D2(-3,\ \sqrt{2},\ 0) = (y = 3\cdot(\sqrt{2} - x))$$

3. D3(B, X_A, Y_A) : DETERMINA LA ECUACIÓN EXPLÍCITA DE LA RECTA, QUE TIENE A B COMO ORDENADA EN EL ORIGEN, Y QUE PASA POR A.

Es una función de tres variables definida de la siguiente forma:

$$\boxed{\#3: \quad D3(p,\ xa,\ ya) := IF\left(xa = 0,\ x = 0,\ y = \frac{ya - p}{xa}\cdot x + p\right)}$$

Algunos ejemplos:

$$\#4: \quad D3(-1,\ 1,\ 2) = (y = 3\cdot x - 1)$$

$$\#5: \quad D3(b,\ -2,\ 3) = \left(y = \frac{x\cdot(b - 3)}{2} + b\right)$$

4. D4(X, Y, X_A, Y_A): DETERMINA LA ECUACIÓN GENERAL DE LA RECTA DE VECTOR DIRECTOR U(X,Y), Y QUE PASA POR A.

Es una función de cuatro variables definida a continuación:

$$\boxed{\#4: \quad D4(xu,\ yu,\ xa,\ ya) := yu\cdot x - xu\cdot y - xa\cdot yu + ya\cdot xu = 0}$$

Entramos las coordenadas del vector director y del punto, en ese orden. Veamos algunos ejemplos:

$$\#10: \quad D4(2,\ 1,\ 0,\ 1) = (x - 2\cdot y + 2 = 0)$$

$$\#11: \quad D4(p,\ 2,\ -1,\ 1) = (2\cdot x - p\cdot y + p + 2 = 0)$$

5 D5(X, Y, , X_A, Y_A): DETERMINA LA ECUACIÓN GENERAL DE LA RECTA DE VECTOR NORMAL V(X, Y) QUE PASA POR A.

Es una función de cuatro variables que definimos a continuación:

$$\#5:\quad D5(xv, yv, xa, ya) := xv\cdot x + yv\cdot y - xa\cdot xv - ya\cdot yv = 0$$

Para utilizarla, debemos picar las coordenadas del vector normal a la recta y las coordenadas del punto. Vemos algunos ejemplos:

$$\#10:\ D5(\sqrt{2}, 4, -5, \sqrt{3}) = (\sqrt{2}\cdot x + 4\cdot y + 5\cdot\sqrt{2} - 4\cdot\sqrt{3} = 0)$$

$$\#11:\ D5\left(\frac{1}{3}, -4, \frac{2}{7}, \frac{3}{5}\right) = \left(\frac{x}{3} - 4\cdot y + \frac{242}{105} = 0\right)$$

6. D6(MX,PY,Q, X_A, Y_A): DETERMINA LA ECUACIÓN GENERAL DE LA RECTA PARALELA A LA RECTA DE ECUACIÓN MX+PY+Q=0 Y QUE PASA POR A

Es una función de cinco variables:

$$\#6:\quad D6(mx, py, q, xa, ya) := mx + py - \frac{xa\cdot mx}{x} - \frac{ya\cdot py}{y} = 0$$

Esta función se utiliza de la misma forma que las anteriores. Algún ejemplo:

$$\#10:\ D6(2\cdot x, -3\cdot y, 5, 1, 1) = (2\cdot x - 3\cdot y + 1 = 0)$$

$$\#11:\ D6(6\cdot x, -2\cdot y, 12, 2, -3) = (6\cdot x - 2\cdot y - 18 = 0)$$

En esta función, podemos omitir q en la definición pues no interviene para nada. De lo único que nos sirve es para verificar que la recta paralela está bien escrita, y para tenerla más a mano por si la recta que hallamos no sólo es paralela sino coincidente.

7. D61(AX,B, X_A, Y_A): DETERMINA LA ECUACIÓN EXPLÍCITA DE LA RECTA PARALELA A LA RECTA DE ECUACIÓN Y=AX+B Y QUE PASA POR A

Está representada por la siguiente función:

$$\#7: \quad D61(ax, b, xa, ya) := y = ax - \frac{xa \cdot ax}{x} + ya$$

Lo mismo que hemos dicho en el apartado anterior con q, lo decimos aquí con b. Podemos omitirlo, pues no interviene para nada.

Algunos ejemplos:

$$\#10: \quad D61\left(- \frac{2}{3} \cdot x, 2, 5, 3\right) = \left(y = \frac{19}{3} - \frac{2 \cdot x}{3}\right)$$

$$\#11: \quad D61(x, 1, 1, 0) = (y = x - 1)$$

8. D7(MX,PY,Q, X_A, Y_A): DETERMINA LA ECUACIÓN GENERAL DE LA RECTA PERPENDICULAR A LA RECTA DE ECUACIÓN MX+PY+Q=0 Y QUE PASA POR A

Definimos esta función de la forma siguiente:

$$\#8: \quad D7(mx, py, q, xa, ya) := \frac{py}{y} \cdot x - \frac{mx}{x} \cdot y + \frac{ya \cdot mx}{x} - \frac{xa \cdot py}{y} = 0$$

Podemos omitir q perfectamente.

Veamos algunos ejemplos:

$$\#10: \quad D7(- 2 \cdot x, - 3 \cdot y, 6, 0, 1) = (- 3 \cdot x + 2 \cdot y - 2 = 0)$$

$$\#11: \quad D7(\sqrt{2} \cdot x, - 5 \cdot y, \sqrt{5}, -5, 12) = (- 5 \cdot x - \sqrt{2} \cdot y + 12 \cdot \sqrt{2} - 25 = 0)$$

9. D71(AX,B, X_A, Y_A): DETERMINA LA ECUACIÓN EXPLÍCITA DE LA RECTA PERPENDICULAR A LA RECTA DE ECUACIÓN Y=AX+B Y QUE PASA POR A

Esta función la definimos de forma análoga a como hemos estado trabajando anteriormente:

$$D71(ax,\ b,\ xa,\ ya) := IF\left(ax = 0,\ x = xa,\ y = -\frac{x}{ax}\cdot x + \frac{x}{ax}\cdot xa + ya,\ y = -\frac{x}{ax}\cdot x + \frac{x}{ax}\cdot xa + ya\right.$$

Algunos ejemplos:

$$\#12:\ D71(\sqrt{2}\cdot x,\ 5,\ -9,\ 17) = \left[y = -\frac{\sqrt{2}\cdot x}{2} - \frac{9\cdot\sqrt{2}}{2} + 17\right]$$

$$\#13:\ D71(x,\ \sqrt{7},\ 1,\ 0) = (y = 1 - x)$$

FICHERO RECTAS.MTH. SOBRE LAS ECUACIONES DE LAS RECTAS.

- **d1(xA, yA, xB, yB):** Determina la ecuación de la recta que pasa por los punto A y B, bajo la forma explícita: y = ax+b
- **d2(m, x_A, y_A):** Determina la ecuación de la recta de pendiente m, que pasa por A, bajo la forma explícita y = mx + b
- **d3(b, x_A, y_A):** Determina la ecuación de la recta de ordenada en el origen b, que pas por A, bajo la forma y = ax + b.
- **d4(x, y, x_A, y_A):** Determina la ecuación de la recta de vector director v(x, y), que pasa por A, en la forma general: Ax+Bx+C=0
- **d5(x, y, x_A, y_A):** Determina la ecuación de la recta de vector normal u(x, y), que pasa por A, y en forma general: Ax + By + C = 0.
- **d6(mx, py, q, x_A, y_A):** Determina la ecuación de la recta paralela a la recta de ecuación mx + ny + q = 0, y que pasa por A.
- **d61(ax, b, x_A, y_A):** Determina la ecuación de la recta paralela a la recta de ecuación: y = ax + b, y que pasa por A.
- **d7(mx, py, q, x_A, y_A):** Determina la ecuación de la rectaperpendicular a la recta de ecuación: mx + py + q = 0, y que pasa por A.
- **d71(ax, b, x_A, y_A):** Determina la ecuación de la recta perpendicular a la recta de ecuación: y = ax + b, y que pasa por A.

ÍNDICE

BIBLIOGRAFÍA

1.- El rincón de la pizarra — Miguel de Guzmán.

2.- Introducción al uso de *DERIVE* — José Luis Llorens

3.- Aplicaciones de *DERIVE*. Análisis Matemático-I — José Luis Llorens

4.- Aplicaciones de *DERIVE*. Álgebra Lineal — José Luis Llorens

5.- Delta. Revista de la asociación de usuarios de *DERIVE* de España. (nº 1, 2)

6.- Introduction to *DERIVE* for Windows — Bernhard Kutzler