

Algunos problemas ternarios de probabilidad condicional. Propuesta de proceso de enseñanza-aprendizaje.

M. Ángeles Lonjedo Vicent, Universitat de València

Resumen

Presentamos un trabajo que aborda la problemática de la enseñanza de la resolución de problemas de probabilidad condicional en la enseñanza secundaria. A partir de una clasificación de los problemas de probabilidad condicional atendiendo a los datos y a la pregunta del problema, estudiamos la presencia de estos problemas en los libros de texto y la resolución de algunos de estos problemas por estudiantes de diferentes niveles educativos. Mostramos cómo la mayoría de los estudiantes que resuelven estos problemas utilizan un razonamiento mayoritariamente aritmético. A partir de los resultados obtenidos, proponemos la inclusión de ciertos problemas de probabilidad condicional en unidades de razón y proporción en los primeros niveles de la enseñanza secundaria, así como variantes de los problemas de probabilidad condicional a lo largo de toda la enseñanza secundaria.

Introducción

En trabajos anteriores (Lonjedo y Huerta, 2004) presentamos una clasificación de los problemas ternarios de probabilidad condicional de enunciado verbal (Cerdán y Huerta, 2007). El fin de esta clasificación es su utilización en la investigación y en la enseñanza de estos problemas. Los problemas se clasifican atendiendo a tres componentes que llamamos nivel, categoría y tipo y que tienen que ver con los datos del problema y con la probabilidad por la que se pregunta.

La clasificación es el resultado de considerar cuatro niveles de problemas N_1 , N_2 , N_3 y N_4 , según el número de datos conocidos como probabilidades condicionales en el enunciado del problema: N_i para $i: 1, 2, 3, 4$ que se corresponde con cero probabilidades condicionales en los datos, una probabilidad condicional, dos probabilidades condicionales y tres probabilidades condicionales respectivamente.

En cada nivel es posible considerar familias de problemas $N_iC_jT_h$ $1 \leq i \leq 4$; $1 \leq j \leq 3$; $1 \leq h \leq 3$, si se tiene en cuenta, además, el número de datos conocidos

que son probabilidades marginales, C_j , y la pregunta o dato desconocido del problema, T_h . A saber, si no hay datos marginales clasificamos con C_1 , si hay un dato con C_2 y si son dos los datos C_3 . Si se pregunta por una condicional T_1 , si es por una marginal T_2 y si se pregunta por una intersección asignamos T_3 .

Considerando los criterios anteriores exploramos los problemas ternarios de probabilidad condicional de enunciado verbal que se incluyen en los textos escolares (Lonjedo, Huerta, 2004) y observamos que existe muy poca presencia de los problemas que hemos clasificado en niveles N_2 y N_4 . Entendemos la ausencia de problemas de nivel N_4 en los libros de texto de la Enseñanza Secundaria, ya que estos problemas son de resolución algebraica (Cerdán y Huerta, 2007). Pero no sabemos nada acerca de la poca presencia de problemas de N_2 . Este hecho puede restar efectividad a la enseñanza de la probabilidad escolar, pues los problemas de probabilidad condicional se trabajan en situaciones repetidas en donde la estructura del problema no varía. Este es uno de los resultados que mostramos en este trabajo.

Para empezar el estudio de los problemas ternarios de probabilidad condicional, elegimos este nivel, N_2 . En la elección de este nivel de problemas no sólo ha influido la poca presencia en los libros de texto, sino también que es el nivel de problemas más completo, ya que es el que más familias conlleva.

El estudio de este nivel de problemas, N_2 , lo realizamos teniendo en cuenta los niveles de análisis que proponen Puig y Cerdán (1988). Estos autores consideran que el estudio de la resolución de problemas puede realizarse considerando tres niveles de análisis, según los personajes que entran en escena en cada momento:

- Nivel I: Los problemas
- Nivel II: Los problemas y los alumnos
- Nivel III: Los problemas, los alumnos y el profesor

Teniendo en cuenta únicamente los problemas que pertenecen a N_2 , realizamos un estudio de Nivel I. Para esto hacemos una lectura del problema en sentido probabilístico con el fin de clasificar las familias de problemas ternarios de probabilidad condicional de resolución aritmética de N_2 atendiendo al número

mínimo de relaciones aditivas y multiplicativas necesarias para su resolución. En este artículo no tratamos este estudio.

Una vez estudiados los problemas entran en escena los alumnos. Así estudiamos los procesos de resolución de estos problemas según una muestra de estudiantes de diferentes niveles educativos, desde 4º ESO a estudiantes de la facultad de Matemáticas, y no todos habiendo recibido instrucción acerca de la probabilidad. En este trabajo mostramos este estudio. Una de las conclusiones de este estudio es que, dependiendo de la expresión de los datos y la pregunta del problema, los problemas ternarios de probabilidad condicional de N_2 son resueltos por la mayoría de los estudiantes de la muestra utilizando estrategias del razonamiento aritmético y sin hacer uso de las reglas y fórmulas de probabilidad.

Niveles de problemas ternarios de probabilidad condicional que muestran los libros de texto

Ortiz de Haro (2002) indica que los libros de texto guían y estructuran el proceso de enseñanza-aprendizaje al sugerir actividades, resaltando informaciones y guiando el proceso de desarrollo de una unidad. Por esta razón los libros de texto constituyen la herramienta para la búsqueda de tipologías de problemas, en nuestro caso de los diferentes niveles de problemas ternarios de probabilidad condicional.

Utilizamos la clasificación de los problemas ternarios de probabilidad condicional en Niveles, Categorías y Tipos para analizar y clasificar los problemas de probabilidad condicional que aparecen en los libros de texto escolares. La intención de este apartado es la de mostrar la tipología de problemas presente y ausente en algunos libros de texto. Hemos estudiado textos desde 1975 hasta el 2002, con la única intención de explorar por una parte, cuál ha sido la presencia o ausencia de los problemas de probabilidad condicional y por otra, qué tipología de problemas está presente o ausente.

Presentamos dos tablas atendiendo a los diferentes currículos. En la tabla 1 presentamos la exploración de los libros de texto escolares de currículos antiguos, desde 1975, que se corresponden con los cursos de BUP y COU. En la

tabla 2 mostramos la tipología presente en los libros de texto escolares que tienen que ver con la ESO y el Bachiller.

CURSO	AUTOR	EDITORIAL	AÑO	N ₁	N ₂	N ₃	N ₄
Funciones 1º BUP	Agustí, Vila	Vicens Vives	1975				
Matemáticas 1 BUP	López, otros	SM	1975				
Matemáticas 1º BUP	Lazcano, Barolo	Edelvives	1981				
Matemáticas de Bachillerato, curso 1	Grupo Cero	Teide	1982	3(N ₁ , C ₁ , T ₁) 3(N ₁ , C ₂ , T ₁) 3(N ₁ , C ₃ , T ₁)		2(N ₃ , C ₂ , T ₁)	
Matemáticas 1 BUP	Compostela, González, ...	AKAL	1987				
Matemáticas 1 BUP, 600 ejercicios con solución	Tomeo, García	Alambra Longman	1990	2(N ₁ , C ₃ , T ₁)			
Matemáticas 1 BUP	Ramírez, Esteve, ...	ECIR	1991	1(N ₁ , C ₂ , T ₁)			
Funciones 1. Matemáticas 1 BUP	Vizmanos, Anzola, Primo	SM	1991				
Como superar las matemáticas de 3º de BUP	Taniguchi	Edunsa	1988				
Matemáticas 3 BUP	Ramírez, Esteve, ...	ECIR	1993				
Matemáticas 3º de Bachillerato	Colera, Guzmán	Anaya	1995				
Matemáticas comunes COU	Valdés, Santos	Bruño	1975				
Matemáticas COU	García García, López Pellicer	Marfil	1979			1(N ₃ , C ₂ , T ₁)	
Matemáticas COU, G2	Negro, Poncela	Alhambra	1990			1(N ₃ , C ₂ , T ₁)	
Curso práctico de Matemáticas COU	González, Villanova	Eunibar	1985	1(N ₁ , C ₃ , T ₁)	1(N ₂ , C ₃ , T ₁)	2(N ₃ , C ₂ , T ₁) 2(N ₃ , C ₂ , T ₃)	
Matemáticas para COU	Pérez Carreras, Pérez Machado	MCGraw-Hill	1988			1(N ₃ , C ₂ , T ₂)	
Matemáticas COU, Opciones C y D	Santos	Santillana	1988	2(N ₁ , C ₁ , T ₁)	1(N ₂ , C ₃ , T ₁)	2(N ₃ , C ₂ , T ₁) 2(N ₃ , C ₂ , T ₂)	
Matemáticas II COU. Opciones C y D	Ramírez, Esteve, ...	ECIR	1988				
Matemáticas II COU. Opciones C y D	González A., González J.	AKAL	1989				
Matemáticas I COU opciones A y B	Ramírez, Esteve, ...	ECIR	1989			1(N ₃ , C ₂ , T ₁) 1(N ₃ , C ₂ , T ₂)	
Selectividad Matemáticas II Pruebas 1990	Guzmán, Colera	Anaya	1991	1(N ₁ , C ₃ , T ₁)		1(N ₃ , C ₂ , T ₃)	

Tabla 1: Tipología presente en algunos libros de texto de currículos antiguos (BUP y COU)

CURSO / TÍTULO	AUTOR	EDITORIAL	AÑO	N ₁	N ₂	N ₃	N ₄
4°ESO, opción B	Vizmanos, Anzola	SM	1994	2 (N ₁ , C ₁ , T ₁)		1 (N ₃ , C ₂ , T ₂)	
4°ESO, opción A	Vizmanos, Anzola	SM	1995	2 (N ₁ , C ₁ , T ₁)		1 (N ₃ , C ₂ , T ₂)	
4°ESO, opción B	Ramírez, Palomero, Esteve, Montesinos	ECIR	1996	2 (N ₁ , C ₁ , T ₁)			
4°ESO, opción B	Colera, García, Oliveira	Anaya	1998	1 (N ₁ , C ₁ , T ₁) 1 (N ₁ , C ₂ , T ₁)			
4°ESO, opción B, Algoritmo	Vizmanos, Anzola	SM	2003			5 (N ₃ , C ₂ , T ₂) 4 (N ₃ , C ₂ , T ₃)	
4°ESO, opción B, Gauss	Vizmanos, Anzola	SM	2003	2 (N ₁ , C ₁ , T ₁)		1 (N ₃ , C ₂ , T ₂)	
1° Bachiller, Matemáticas I	Colera, García, Oliveira	Anaya	2002	4 (N ₁ , C ₃ , T ₁)		3 (N ₃ , C ₂ , T ₁)	
1° Bachiller, Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales I	Colera, García, Oliveira	Anaya	2002				
2° Bachiller, Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II, ALGORITMO 2001	Vizmanos, Anzola	SM	2001	2 (N ₁ , C ₃ , T ₁)	1 (N ₂ , C ₃ , T ₁)	1 (N ₃ , C ₂ , T ₁) 2 (N ₃ , C ₂ , T ₂) 2 (N ₃ , C ₂ , T ₂)	
2° Bachiller, Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II	Ramírez, Esteve, Montesinos, Deusa, Veres	ECIR	2001	3 (N ₁ , C ₃ , T ₁)		2 (N ₃ , C ₂ , T ₁)	
2° Bachiller, Matemáticas aplicadas a las ciencias sociales II	Colera, García, Oliveira	Anaya	2002	4 (N ₁ , C ₃ , T ₁)		3 (N ₃ , C ₂ , T ₁)	
Bachillerato, Cuaderno 4, Estadística y Probabilidad	Grupo Erema: Martín, Rey, Reyes	Bruño	2002		2 (N ₂ , C ₃ , T ₁) 1 (N ₂ , C ₃ , T ₃)	2 (N ₃ , C ₂ , T ₁) 3 (N ₃ , C ₂ , T ₂)	

Tabla 2: Tipología presente en algunos libros de texto de currículos actuales (ESO y Bachiller)

Observamos que los niveles ausentes o poco presentes en los libros de texto de la enseñanza no universitaria, son los niveles N₂ y N₄. Los problemas que

pertenecen a N_4 son problemas con los tres datos probabilidades condicionales o interpretables como tales.

El ejemplo siguiente es una muestra de (N_4, C_1, T_3) en cuanto a la primera pregunta y (N_4, C_1, T_2) en cuanto a la segunda.

EJEMPLO 1: En un grupo de individuos se pasó un test de inteligencia y se midió su rendimiento académico. Se estudiaba la Inteligencia superior y el rendimiento alto. De este estudio se sabe que, elegido un individuo:

- La probabilidad de que tenga inteligencia superior sabiendo que su rendimiento es alto es $2/3$.
- La probabilidad de que tenga rendimiento alto sabiendo que su inteligencia es superior es de $5/7$.
- La probabilidad de que no tenga inteligencia superior sabiendo que su rendimiento no es alto es $3/5$.

Calcula la probabilidad de ser inteligente y tener rendimiento alto y la probabilidad de tener rendimiento alto.

Estos problemas tienen una solución algebraica y podemos considerar lógica su ausencia en los libros de texto, pues no están propuestos en la Enseñanza Secundaria. Pero los problemas de N_2 , con sólo un dato condicional, no sabemos el porqué de su ausencia. Esta ausencia provoca una enseñanza poco efectiva.

Nos preguntamos si los estudiantes de diferentes niveles educativos resuelven problemas de N_2 .

Ya hemos dicho en la introducción que pensamos que este hecho resta efectividad a la enseñanza de la probabilidad escolar, pues priva a los estudiantes de usarla en contextos y situaciones problemáticas variadas, mostrándose el uso de ésta en situaciones repetidas en donde la estructura del problema no varía y sólo se varía el contexto y la presentación de los datos, ya sea organizada o no

Estudio de las resoluciones de los estudiantes de problemas ternarios de probabilidad condicional de enunciado verbal de N_2 .

En un estudio anterior (Huerta y Lonjedo, 2006) realizamos una prueba con problemas de N_2 , la mitad de éstos con los datos expresados en términos de porcentajes y la otra mitad con los datos expresados en términos de probabilidad. Los estudiantes que participaron en esta investigación pertenecían a diferentes niveles educativos, desde 4º ESO a 2º de Bachiller y estudiantes de la facultad de Matemáticas. No todos los estudiantes habían recibido instrucción acerca de la teoría de la probabilidad. Una de las conclusiones de este trabajo fue que la mayoría de los estudiantes que participaron en la investigación y resolvieron con éxito los problemas con los datos expresados en porcentajes, ni interpretaron los datos como probabilidades ni, consecuentemente, usaron las relaciones entre probabilidades para obtener las probabilidades pedidas en los problemas. Los resolvieron utilizando lo que hemos llamado el razonamiento aritmético. Sin embargo los problemas en los que los datos estaban en términos de probabilidad, además de ser menos trabajados por los estudiantes, la mayoría de los que resolvieron con éxito utilizaron las reglas de cálculo de la probabilidad para resolverlos. Y nos llamó la atención cómo algunos estudiantes al resolver este último grupo de problemas, tradujeron los términos de probabilidad a porcentajes y resolvieron según un proceso de resolución que incluye una forma de pensamiento aritmético, tal y como mostramos en la Resolución 1 para el problema A. En este caso el estudiante, que cursaba Matemáticas I, expresa el resultado en porcentaje.

PROBLEMA A: La probabilidad de que los integrantes de un campamento de verano sean niñas es de 0'55. De las niñas, la probabilidad de realizar actividades acuáticas es de 0'2, y elegido un integrante al azar, la probabilidad de ser niño y realizar actividades acuáticas es de 0'1125. Calcula la probabilidad de que eligiendo un integrante que realiza actividades acuáticas, éste sea niña.

niñas 55% del total
 $55 \cdot 20\% = 11\%$ actividades académicas niñas.
 niñas actividades académicas .11,25%
 22,25% realizan actividades académicas.

$22,25 \frac{\quad}{100}$
 $11 \frac{\quad}{x}$
 $x = 49,43\%$ serán niñas.

Resolución 1: Actuación de un estudiante de 1° de Bachiller de la asignatura Matemáticas I

Una vez realizada esta prueba pensamos que era importante investigar acerca de los modos de resolución de los estudiantes ante una colección de problemas de probabilidad condicional, siempre de N_2 , con los datos expresados en frecuencias absolutas y con los datos expresados en porcentajes. No consideramos los problemas con los datos expresados en términos de probabilidad por diferentes razones. La razón de más peso es que al haber estudiantes en la muestra que no habían recibido enseñanza formal acerca de la probabilidad, este hecho privó a estos estudiantes de realizar estos problemas, pues su dificultad se basaba en el desconocimiento de los datos del problema.

LA PRUEBA

Creamos una prueba con 6 problemas de probabilidad condicional de N_2 , con los datos expresados en términos de frecuencias absolutas y con los datos expresados en porcentajes. La tabla siguiente muestra los problemas de la prueba:

PROBLEMA	Naturaleza datos	pregunta
<u>PROBLEMA 1:</u> En un curso de 100 estudiantes 60 aprobaron filosofía y 70 aprobaron matemáticas. De los que aprobaron matemáticas un 80% aprobó filosofía. De los que aprobaron filosofía ¿qué porcentaje aprobó matemáticas?	Frecuencias y %	porcentaje
<u>PROBLEMA 2:</u> En una empresa el 55% de los trabajadores son mujeres y el 11.25% son hombres y realizan tareas administrativas. De las mujeres el 20% se dedica a las tareas administrativas. Elegido un trabajador al azar, calcula la probabilidad de que sea mujer y no realice tareas administrativas.	%	probabilidad
<u>PROBLEMA 3:</u> El 60% de los estudiantes de un centro escolar habla francés correctamente y el 70% habla inglés. De los que no hablan francés un 35% habla inglés. Calcula la probabilidad de que elegido un estudiante al azar no hable ninguno de los dos idiomas.	%	Probabilidad
<u>PROBLEMA 4:</u> De los 400 integrantes de un campamento de verano 220 son niñas. De	Frecuencia y	Porcentaje

Algunos problemas ternarios de probabilidad condicional. Propuesta de enseñanza-aprendizaje

las niñas el 20% realiza actividades acuáticas y hay 45 niños que realizan actividades acuáticas. De los que realizan actividades acuáticas ¿qué porcentaje de niñas hay?	%	
PROBLEMA 5: El 46% de los habitantes de una localidad son seguidores del club de fútbol A y el 60% lo son del club de fútbol B. De los seguidores del club B la mitad lo son del club A. Se escoge una persona al azar de los seguidores del club de fútbol A ¿qué probabilidad hay de que sea seguidor del club B?	Una razón y %	Probabilidad
PROBLEMA 6: De todos los estudiantes del instituto un 30% practica baloncesto y fútbol y un 30% practica baloncesto y no practica fútbol. De los estudiantes que no practican baloncesto un 40% practica el fútbol. ¿Qué porcentaje de estudiantes del instituto practica el fútbol?	%	Porcentaje

Tabla 1: Los problemas de la prueba

LOS ESTUDIANTES

La tabla 2 da cuenta de la muestra de estudiantes, de su distribución por niveles educativos así como de la asignatura en la que se administró la prueba.

Nivel	Descripción	Muestra	Asignatura
EFM	Facultad de Matemáticas	10	Cálculo de probabilidades y Estadística
2BCS-H	2º de bachiller ciencias sociales-humanidades	15	Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II
1BT-C	1º de bachiller tecnológico-científico	24	Matemáticas I
4ESO	4º educación secundaria obligatoria	31	Matemáticas B

Tabla 2: Distribución de los estudiantes que realizaron la prueba

La prueba se administró durante una hora lectiva de los estudiantes en cada uno de sus centros.

METODOLOGÍA DE ANÁLISIS

Hemos creado cuatro descriptores para organizar las respuestas de los estudiantes que han llegado al resultado correcto del problema Utilizamos el término resultado para indicar lo que contesta a la pregunta del problema (Puig, 1996, p.34).

Los descriptores consideramos son: el proceso de resolución que incluye una forma de pensamiento exclusivamente aritmético, el proceso de resolución que incluye una forma de pensamiento mayoritariamente aritmético, el proceso de resolución que incluye una forma de pensamiento básicamente probabilístico, el proceso de resolución que incluye una forma de pensamiento probabilístico. Definimos estos descriptores.

1. Proceso de resolución que incluye una forma de pensamiento exclusivamente aritmético

El resolutor razona sobre las cantidades, sin asignar características a estas cantidades, utilizando la aritmética. La resolución 2 muestra la actuación de un estudiante de 4° ESO en P1, que incluye una forma de pensamiento exclusivamente aritmético. Trabaja con las cantidades, utilizando la aritmética, pero sin reconocer explícitamente los sucesos.

PROBLEMA 1

En un curso de 100 estudiantes 60 aprobaron filosofía y 70 aprobaron matemáticas. De los que aprobaron matemáticas un 80% aprobó filosofía. De los que aprobaron filosofía ¿qué porcentaje aprobó matemáticas?

Handwritten work showing a table and calculations:

Se de	80% de 70
100	70
80	x
80	70
70	x

80% de 70 = 56
 $x - 100$
 $56 - 60$

$\frac{56 \cdot 100}{60} = 93.33$

Resolución 2: Actuación de un estudiante de 4° ESO en P1

2. Proceso de resolución que incluye una forma de pensamiento mayoritariamente aritmético

El estudiante utiliza los números pero hay un reconocimiento explícito de los sucesos y de sus frecuencias o porcentajes. La resolución 3 es un ejemplo de este modo de resolución.

Handwritten work showing calculations:

Baloncesto + Fútbol $\rightarrow 30\%$
 Baloncesto $\rightarrow 30\% + 30\%$
 Fútbol $\rightarrow 40\%$ del 40% que no practica baloncesto. + 30%

$40\% \text{ de } 40\% = \frac{40 \cdot 40}{100} = \frac{1600}{100} = 16\%$

Practican el fútbol $\rightarrow 16\% + 30\% = 46\%$

Resolución 3: Actuación de un estudiante de 4° ESO en P6

3. Proceso de resolución que incluye una forma de pensamiento básicamente probabilístico

En la actuación del estudiante hay un reconocimiento de los sucesos y asignación de sus probabilidades. Utiliza la aritmética en la resolución, es decir el resolutor trabaja con cantidades tales como frecuencias, porcentajes, aunque reconoce los sucesos y asigna probabilidades. La siguiente resolución da cuenta de este proceso de resolución.

de que sea mujer...

M = mujeres
H = hombres
A = administr.
 \bar{A} = no administr.

	M	H	
A	11	11'25	22'25
\bar{A}	44		77'5
	55	45	100

La solución es el 44%, la probab. es 0'44

PROBLEMA 3

Resolución 4: Actuación de un estudiante de EFM en P2

4. Proceso de resolución que incluye una forma de pensamiento probabilístico

Hay un reconocimiento de sucesos y asignación de probabilidades a esos sucesos para utilizar las reglas de cálculo "de y entre probabilidades" en la resolución. La resolución 5 muestra la actuación de un estudiante en este sentido.

matemáticas. De los que aprobaron matemáticas un 80% aprobó filosofía. De los que aprobaron filosofía ¿qué porcentaje aprobó matemáticas?

$F = \{ \text{aprobaron filosofía} \} \rightarrow P(F) = 0.6$
 $M = \{ \text{ " matemáticas} \} \rightarrow P(M) = 0.7$
 $M \cap F = \{ \text{ " filosofía} \} \rightarrow P(M \cap F) = 0.8$

$$P(M|F) = \frac{P(M \cap F) \cdot P(F)}{P(F)} = \frac{0.8 \cdot 0.7}{0.6} = 0.933 \rightarrow 93.3\%$$

Resolución 5: Actuación de un estudiante de EFM en P1

RESULTADOS Y ANÁLISIS

En la tabla 4 observamos el porcentaje de estudiantes que han resuelto con éxito cada uno de los problemas de la prueba, así como su distribución según el descriptor que define el modo de resolución.

	P1	P2	P3	P4	P5	P6
Proceso de resolución con éxito	36.25	16.25	7.5	47.5	11.25	12.5
1. Proceso de resolución exclusivamente aritmético	24.13	0	0	10.53	0	0
2. Proceso de resolución mayoritariamente aritmético	65.52	30.77	16.67	86.84	55.55	90
3. Proceso de resolución básicamente probabilístico	0	30.77	50	2.63	33.33	0
4. Proceso de resolución probabilístico	10.34	38.46	33.33	0	11.11	10

Tabla 4: Porcentaje de estudiantes que han resuelto con éxito

Si observamos la última fila de la tabla 4, que muestra el porcentaje de estudiantes que tienen un modo de resolución exclusivamente probabilístico, la mayoría de los estudiantes que han resuelto con éxito los problemas no han utilizado las reglas “de y entre probabilidades” en el proceso de resolución del problema. Cuando las cantidades de los problemas de probabilidad condicional están expresadas en frecuencias absolutas y/o en porcentajes, hace que el problema de probabilidad condicional sea un problema de asignación de probabilidades (Huerta y Lonjedo, 2003a, 2003b)

Los problemas que han tenido mayor éxito han sido los problemas P1 y P4. Estos problemas tienen como característica común la expresión de los datos, en frecuencias absolutas, el dato que muestra la probabilidad condicional expresado en porcentaje y la expresión de la pregunta, se pregunta por un porcentaje.

Además, si tenemos en cuenta la pregunta del problema, en P1, P4 y P6 son los problemas en los que se pregunta por un porcentaje, y en estos tres problemas la mayoría de los estudiantes, 90%, resuelven reconociendo los sucesos, utilizando estrategias de la aritmética y sin asignar probabilidades a los sucesos.

Queremos notar que los problemas P1 y P5 son problemas que según nuestra clasificación pertenecen a la misma familia, $N_2C_3T_1$, es decir, sus datos son una condicional y dos marginales y se pregunta por una condicional no

complementaria con el dato condicional. Además, es de fácil comprobación, el número mínimo de relaciones entre los datos y la pregunta del problema para llegar a la solución del problema es de 2 relaciones multiplicativas. Sin embargo el porcentaje de éxito es mucho más bajo en P5 que en P1. La diferencia de estos dos problemas, además del contexto, está en la expresión de los datos y la pregunta del problema. En el problema P1 ya hemos dicho que los datos son frecuencias absolutas menos el dato condicional que es un porcentaje y se pregunta por un porcentaje. En el problema P5 los datos son porcentajes y una razón y se pregunta por una probabilidad.

CONCLUSIONES

Observamos que cuando las cantidades presentes en el problema de probabilidad condicional son frecuencias absolutas y/o porcentajes, la mayoría de los estudiantes, independientemente de la instrucción recibida, utilizan en el proceso de resolución del problema una forma de pensamiento mayoritariamente aritmético, es decir, hacen una lectura del problema reconociendo los sucesos, los cardinales de los conjuntos que representan estos sucesos y utilizan la aritmética en la resolución del problema. Lo que no hacen es una lectura de dichos problemas en términos de probabilidades y resuelven con ellas el problema. Esto pone en cuestión el modo habitual en el que se enseña la resolución de problemas en la enseñanza secundaria. Los datos numéricos presentes en los problemas de probabilidad que hemos considerado, adquieren significado para los estudiantes cuando están expresados en porcentajes y sobre todo en frecuencias absolutas. Así, cuando las cantidades tienen cierto significado para los estudiantes, pueden producir nuevas cantidades que sean relevantes para la resolución del problema y facilitan el proceso de resolución. En consecuencia, no decimos nada nuevo y confirmamos otros estudios, Fiedler (1988), Gigerenzer (1994), Gigerenzer & Hoffrage (1995), Hoffrage, Gigerenzer y otros (2002), Ojeda (1996), delMas (2002), si seguimos apostando por la resolución de problemas de probabilidad en los que los datos sugieran un enfoque frecuencial de la probabilidad, antes de que ésta se muestre de una manera formal.

Nuestra propuesta para la enseñanza de los problemas de probabilidad y en particular de los problemas de probabilidad condicional, consiste en introducir la resolución de los problemas de probabilidad condicional en las unidades que se corresponden con Razón y Proporción de los cursos de secundaria obligatoria, en los que en el currículo no está el concepto de probabilidad condicional. Esta propuesta de enseñanza no supone un cambio en el currículo, sino una introducción de unos problemas en unidades ya definidas del currículo. Introduciremos los problemas primero con datos en frecuencias absolutas y después con datos en porcentajes, y siempre preguntando por un porcentaje. En los problemas con los datos en frecuencias absolutas, se trabaja el reconocimiento de conjuntos, la asignación de cardinales a conjuntos con una determinada propiedad, además de la aritmética necesaria para resolver el problema y el uso de porcentajes para responder a la pregunta del problema. En los problemas con los datos en porcentajes, de forma implícita se trabaja el reconocimiento de sucesos y la medida que se asigna a estos sucesos, el porcentaje correspondiente. Estos problemas los consideramos precursores del sentido probabilístico. En la unidad de Probabilidad de 3º ESO (Decreto 1631/2006 del 29 de diciembre del 2006) también podemos trabajar la resolución de estos problemas, de forma que la pregunta se haga en términos de probabilidad, para que, además del reconocimiento explícito de los sucesos, el proceso de resolución del problema finalice asignando la probabilidad al suceso correspondiente. En esta unidad trabajaremos estos problemas con cantidades en frecuencias absolutas y/o en términos de razón. En los libros de texto, en las unidades de introducción a la probabilidad, la mayoría de los problemas no son problemas en el sentido en el que nosotros los utilizamos. Son ejercicios de asignar probabilidades en fenómenos aleatorios, generalmente de juegos de azar y no hay ningún problema de este tipo. Al final de la unidad suelen haber algunos problemas propuestos para practicar la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos no incompatibles. No aparecen problemas verbales con la estructura de los que hemos presentado en este trabajo que pueden ubicarse en esta unidad, ya que en el proceso de resolución de los mismos los únicos conceptos probabilísticos necesarios son el

concepto de probabilidad y la Ley de Laplace. Nuestra propuesta no es únicamente la de trabajar problemas de probabilidad condicional. Proponemos tener en cuenta problemas de probabilidad en los que la naturaleza de las cantidades presentes sea frecuencias y/o porcentajes, y se pregunte por una probabilidad.

Utilizamos en estos dos primeros escalones los problemas de probabilidad condicional como problemas de asignación de probabilidades.

Por último, trabajamos los problemas de probabilidad condicional en la unidad de Probabilidad Condicional, situada en los cursos de 4º ESO y Bachiller, donde el resolutor se puede encontrar con problemas en los que las cantidades están expresadas de diferente forma, y es el resolutor el que decide si el problema de probabilidad condicional es un problema de asignación de probabilidades o de cálculo de probabilidades, según la lectura que haga del problema y apoyándose en las tablas de contingencia y en los diagrama de árbol.

Un objetivo del proceso de enseñanza-aprendizaje de los problemas de probabilidad condicional, debe ser que, el resolutor, ante un PPC, sea capaz de decidir entre los diferentes estratos del SMS cuál de ellos, más abstracto o más concreto, va a utilizar en el proceso de resolución del problema.

En este estudio mostramos que los problemas de probabilidad condicional de solución aritmética de N_2 son resueltos por estudiantes de diferentes niveles escolares, con y sin conocimiento formal acerca de la teoría de la probabilidad. Proponemos su inclusión en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la resolución de problemas de probabilidad condicional, de forma que este proceso incluya la resolución de los problemas de los que hemos hablado formulados tantos contextos y situaciones problemáticas en los que el estudio de la probabilidad condicional tenga sentido llevarlo a cabo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Cerdán, F; Huerta, M.P (2007) Problemas ternarios de probabilidad condicional y grafos trinomiales. *Educación Matemática*

delMas, Robert C. (2002). A Review of the Literature on Learning and Understanding Probability, paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, New Orleans, LA, April 1-5, 2002, consultada en http://www.gen.umn.edu/faculty_staff/delmas/area2002_rev_of_prob_lit.html#CONDITIONAL el 17/10/2005.

Fiedler, K. (1988). The dependence of the Conjunction Fallacy on Subtle Linguistic Factors. *Psychological Research*, 50, pp.123-129.

Gigerenzer, G. (1994). Why the distinction between single-event probabilities and frequencies is important for psychology (and vice-versa). In G. Wright y P. Ayton (Eds.), *Subjective probability* (pp. 129-161) Chichester: Wiley.

Gigerenzer, G. and Hoffrage, U. (1995). How to Improve Bayesian Reasoning Without Instruction: Frequency Formats. *Psychological Review*, 102, pp. 684-704.

Hoffrage, U.; Gigerenzer, G.; Krauss, S. and Martignon, L. (2002). Representation facilitates reasoning: what natural frequencies are and what they are not, *Cognition* 84, pp. 343-352.

Huerta, M. P. y Lonjedo, M.A. (2003a). Los problemas de probabilidad condicional en la Enseñanza Secundaria, en *Encuentros Educativos. XI Jornadas sobre el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas* (XI JAEM) Edita: Consejería de Educación, Cultura y Deportes del Gobierno de Canarias, Febrero 2005.

Huerta, M. P. y Lonjedo, M.A. (2003b). La resolución de problemas de probabilidad condicional. En Castro, Flores et al. (eds), 2003, *Investigación en Educación Matemática. Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. Granada.

Huerta, M.P y Lonjedo, M.A. (2006). The Nature of the quantities in a conditional probability problem. Its influence in the problem solving behaviour. In M.Bosch (ed.)(2006) *European Research in Mathematics*

Education IV. Proceedings of the Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, pp. 528-538. San Feliu de Guíxols, Spain.

Lonjedo, M.A y Huerta, M. P. (2004). Una clasificación de los problemas escolares de probabilidad condicional. Su uso para la investigación y el análisis de textos. En Castro, de la Torre (eds), 2004, *Investigación en Educación Matemática. Octavo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, pp 229-238, Universidade da Coruña.

Lonjedo, M.A. y Huerta, M.P. (2005). La naturaleza de las cantidades presentes en el problema de probabilidad condicional. Su influencia en el proceso de resolución del problema. En Maz, Gómez y Torralbo (eds), 2005, *Investigación en Educación Matemática. Noveno Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. Córdoba.

Ojeda Salazar, A.M. (1996). Contextos, Representaciones y la idea de Probabilidad Condicional, *Investigaciones en Matemática Educativa* (pp. 291-310) México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Ortiz De Haro, J.J. (2002). *La probabilidad en los libros de texto*, Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Puig, L. (1996). Elementos de resolución de problemas. Granada: Comares

Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Síntesis. Madrid.