

LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE PROBABILIDAD CONDICIONAL: UN ESTUDIO EXPLORATORIO CON ESTUDIANTES DE BACHILLER.

M^a ÁNGELES LONJEDO VICENT

M. PEDRO HUERTA PALAU

1. INTRODUCCIÓN

La comunicación que presentamos en el Grupo de Pensamiento aritmético-algebraico de la SEIEM, da cuenta de algunos resultados del proyecto de investigación que con el mismo título presentamos en la Universitat de València y que se refieren a la resolución de problemas de probabilidad condicional por estudiantes sin instrucción previa (Lonjedo, 2003).

Mostraremos como la resolución de dichos problemas implica al pensamiento aritmético y no al probabilístico, ya que los datos no son interpretados como probabilidades y por tanto no se usan las relaciones entre probabilidades que una enseñanza formal exigiría para obtener la solución del problema. En cambio, los datos son interpretados y usados con el fin de responder a las preguntas del problema, finalizando el proceso con una asignación de probabilidades.

2. LOS PROBLEMAS DE PROBABILIDAD CONDICIONAL Y SU CLASIFICACIÓN

Entendemos por problema de probabilidad condicional un problema¹ en el que o bien en los datos o bien en la pregunta del problema es necesario que el resolutor considere la probabilidad condicional de un suceso². Estos problemas pueden clasificarse según los datos explícitamente mencionados en ellos (Yañez, 2000). Se sabe que el número mínimo de datos que debe presentar un problema de probabilidad condicional para que tenga solución es de tres, explícitamente mencionados en el texto, escogidos convenientemente entre probabilidades marginales, probabilidades de la intersección o probabilidades condicionales. Consecuente con un análisis combinatorio al tomar los datos así, los problemas de probabilidad condicional pueden clasificarse mediante un vector de tres componentes, como sigue:

- Tipo 1: los datos son tres intersecciones: (0, 3, 0).
- Tipo 2: los datos son una marginal y dos intersecciones: (1, 2, 0).
- Tipo 3: los datos son dos marginales y una intersección: (2, 1, 0).
- Tipo 4: los datos son dos marginales y una condicional: (2, 0, 1).

¹ Problema según Puig (1996)

² Nuestro trabajo estudia los problemas de probabilidad condicional que implican dos sucesos A y B y las probabilidades: las probabilidades marginales: $p(A)$, $p(B)$, $p(-A)$, $p(-B)$, las probabilidades de la intersección: $p(A \cap B)$, $p(A \cap -B)$, $p(-A \cap B)$, $p(-A \cap -B)$ y las probabilidades condicionales: $p(A/B)$, $p(-A/B)$, $p(A/-B)$, $p(-A/-B)$, $p(B/A)$, $p(-B/A)$, $p(B/-A)$, $p(-B/-A)$.

- Tipo 5: los datos son dos intersecciones y una condicional: (0, 2, 1).
- Tipo 6: los datos son una marginal una intersección y una condicional: (1, 1, 1).
- Tipo 7: los datos son una marginal y dos condicionales: (1, 0, 2).
- Tipo 8: los datos son una intersección y dos condicionales: (0, 1, 2)
- Tipo 9: los datos son 3 condicionales: (0, 0, 3).

Aunque partimos de ella, nuestra investigación reveló que esta clasificación era insuficiente si solo se tiene en cuenta los datos como probabilidades y no se tiene en cuenta la o las preguntas del problema. Nuestra intención futura es refinar esta clasificación con el fin de poder abordar el estudio de la resolución de los problemas sujetos a esta nueva clasificación.

3. ALUMNOS Y PRUEBA

Los participantes de la fase experimental han sido once alumnos de un IES de la ciudad de Valencia, cinco de 1º de Bachiller y seis de 2º de Bachiller, cursando las asignaturas Matemáticas I y Matemáticas II respectivamente, sin que hasta el momento de la experimentación hubiesen recibido enseñanza en probabilidad condicional. Estos estudiantes accedieron voluntariamente a participar en esta fase de la investigación.

Preparamos una colección de problemas escolares correspondientes con los nueve tipos de la clasificación anterior. El análisis de dichos problemas reveló que, normalmente, hay tres formas de presentar los datos en un problema de probabilidad escolar: en tanto por cien, en frecuencias absolutas y en términos de probabilidad. Esta colección sirvió de base par la preparación de la prueba de la fase experimental que consistió en cinco problemas que se corresponden con los cinco primeros tipos de la clasificación. Los datos de estos cinco problemas no se expresan explícitamente en términos de probabilidades, siendo el resolutor el que ha de interpretarlos en un sentido u otro con el fin de resolver el problema

4. ALGUNOS COMPORTAMIENTO EN LA RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS

Hemos elegido para esta comunicación tres de los problemas de la prueba con el fin de mostrar algunos resultados relevantes de las actuaciones de los estudiantes que muestran el predominio del pensamiento numérico en la resolución de los mismos.

PROBLEMA 1:

En un centro escolar hay 1000 alumnos repartidos así:

Escogemos uno al azar. Calcula la probabilidad de que:

- Sabiendo que es chico, no use gafas.
- Sea chica sabiendo que usa gafas.

	Chicos	Chicas
Usan gafas	147	135
No usan gafas	368	350

Se trata de un problema del tipo 1, donde los datos de la tabla son tres cantidades que pueden interpretarse como probabilidades de la intersección de dos sucesos. En este caso concreto el problema presenta cuatro, siendo una redundante, pues el problema da el n° total de alumnos. Los datos se presentan en frecuencias absolutas y organizados en una tabla de contingencia. Obviamente las preguntas del problema son probabilidades condicionales.

Comportamientos de los estudiantes en la resolución de este problema:

Los estudiantes resuelven este problema como si fuera un problema de asignación de probabilidades³. Trabajan utilizando la aritmética para terminar asignando la probabilidad al suceso pedido. Mostramos algunos ejemplos en los que se usa la regla de tres (ver ejemplos 1 y 2 en el anexo de las actuaciones).

En ambos ejemplos los estudiantes contestan a la primera cuestión del problema obteniendo el n° total de chicos del instituto. En el ejemplo 1, el estudiante usa la regla de tres para expresar el porcentaje de los que no utilizan gafas. En el ejemplo 2, el estudiante expresa la relación del n° total de chicos con el n° de los que no usan gafas con la relación tomando 100 como muestra mediante la proporción correspondiente. En ambos casos, la probabilidad pedida es el medio que falta en la proporción, expresada ahora como tanto por ciento.

Un estudiante expresa el resultado en términos de razón: (ver actuación en ejemplo3) Este estudiante utiliza los datos del problema, obtiene el total de chicos y expresa la probabilidad pedida como la razón entre dos cantidades 368 y 515, o bien la razón a 1.

PROBLEMA 4.

En una ciudad se conoce que el porcentaje de ciudadanos que leen el diario A y el del que leen el diario B es, 50% y 45% y que leyendo A leen también B es 40%. Calcula la probabilidad de que sabiendo que un ciudadano lee el diario B, lea también el diario A.

Se trata de un problema del tipo 4, donde los datos pueden interpretarse como dos probabilidades marginales y una condicional ya que los datos mencionados en el texto del problema son tantos por cien. La condicionalidad del dato se puede reconocer en la estructura: *que leyendo A leen también B*. La condicionalidad en la pregunta es reconocible en la estructura: *sabiendo que... lee el diario B, lea también el diario A*.

Comportamientos de los estudiantes en la resolución de este problema:

Los estudiantes que resuelven el problema trabajan con los datos como cantidades, usando la razón expresada en tanto por cien como una fracción y expresando el resultado en tanto por ciento. Este problema es uno de los que la mayoría no llegó a la solución, sobre todo por

³ Definimos un problema de probabilidad escolar como problema de asignación si el proceso de resolución implica una decisión en términos de probabilidad sobre un suceso que pertenece a una situación aleatoria.

confundir el dato que da cuenta de la probabilidad condicional con una probabilidad de la intersección. Mostramos tres ejemplos en los que podemos observar estos tres descriptores:

En el ejemplo 4 el estudiante utiliza destrezas heurísticas propias como recurso para interpretar los datos que usará para la resolución del problema. Este estudiante es el único que llega a la solución del problema, siendo además el único que no presenta confusión con el dato que se refiere a la probabilidad condicional. Esta cantidad la calcula: el *40% del 50% $\Rightarrow$ 20%*, utilizando el tanto por cien como fracción. Para calcular la probabilidad pedida expresa el porcentaje en números decimales, haciendo cálculos con ellos de manera que la probabilidad pedida la expresa, finalmente en tanto por ciento.

Los ejemplos 5 y 6 muestran como los estudiantes confunden el dato que da cuenta de la probabilidad condicional con una intersección. La expresión utilizada en el problema: *que leyendo A leen también B*, induce a la confusión. En el ejemplo 5 suma y resta los tantos por cien, utilizándolos como fracciones. En el ejemplo 6 resuelve utilizando la regla de tres en la que los elementos son los porcentajes.

PROBLEMA 5.

De todos los alumnos del instituto, un 30% practican baloncesto y fútbol y un 30% practican el baloncesto y no practican el fútbol. Sabemos que de los alumnos que no practican baloncesto un 40% hacen fútbol. Calcula las probabilidades de practicar baloncesto y de practicar fútbol.

Se trata de un problema del tipo 5, donde los datos mencionados en el texto son tantos por cien que pueden interpretarse como dos probabilidades de la intersección y una condicional.

La condicionalidad puede reconocerse ahora en la estructura: *Sabemos que de los alumnos que no practican baloncesto un 40% hacen fútbol*.

Comportamientos de los estudiantes en la resolución de este problema:

Los estudiantes no confunden el dato que da cuenta de la probabilidad condicional con si fuera una probabilidad de intersección. En este problema la expresión: *Sabemos que de los alumnos que no practican baloncesto un 40% hacen fútbol*, induce al uso correcto del dato y facilita la resolución del problema.

En los dos casos siguientes (Ejemplos 7 y 8), los estudiantes trabajan con los tantos por cien a modo de fracciones, suman y restan aquellos como si sumaran y restaran fracciones. El estudiante del ejemplo 7 utiliza sus propios recursos heurísticos para interpretar los datos del problema. Este estudiante además expresa el resultado en términos de probabilidad que subraya.

5. CONCLUSIONES

La presentación de los datos en algunos problemas de probabilidad condicional permite resolver estos problemas sólo con los requisitos del conocimiento numérico, tales como razón, proporción, etc., por lo que su estudio también implica al pensamiento numérico. Pero, la tradición en la enseñanza de las probabilidades nos muestra lo contrario. Los profesores no solemos utilizar el pensamiento numérico en el contexto de la probabilidad.

Con esta comunicación hemos mostrado como existen problemas en los libros de texto escolares, que situados en las lecciones de probabilidad, son resueltos por los estudiantes mediante razonamientos que utilizan la aritmética y no utilizan las reglas de cálculo de probabilidad de manera que los estudiantes convierten intuitivamente los problemas de probabilidad condicional, que inicialmente han sido pensados como problemas de cálculo de probabilidades, en problemas de asignación de probabilidades.

6. REFERENCIAS

Lonjedo M^a A., 2003, *La resolución de problemas de probabilidad condicional: Un estudio exploratorio con estudiantes de bachiller*, Departament de Didàctica de la Matemàtica, Universitat de València (Memoria de Tercer Ciclo no publicada)

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*, (Comares: Granada)

Yañez, G, 2000, El Álgebra, las Tablas y los Árboles en Problemas de Probabilidad Condicional, en Gómez, P., y Rico, L. (eds.), *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro*. Granada: Editorial Universidad de Granada. Pp. 355-371

EJEMPLOS DE LAS ACTUACIONES DE LOS ESTUDIANTES

1000 alumnos $\rightarrow$ 515 chicos $\rightarrow$ 368 no usan uñeros.
 O sea $\frac{515}{1000} = \frac{368}{x}$ $\rightarrow$ $x = 714,56\%$ no tiene uñeros.

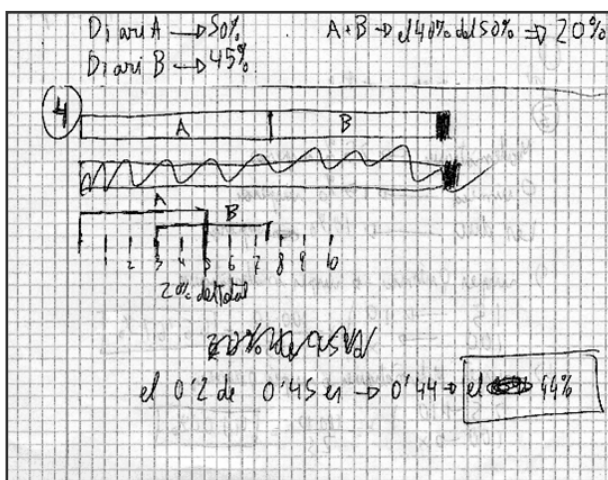
Ejemplo 1

a) $\frac{515}{368} = \frac{100}{x} \rightarrow x = 71,456\%$
 b) $\frac{495}{135} = \frac{100}{x} \rightarrow x = 27,835\%$

Ejemplo 2

Probabilidad = $\frac{368}{515} \approx 0,71$ de 1.

Ejemplo 3



Ejemplo 4

4) $A = 50\%$
 $B = 45\%$
 $A + B = 40\%$

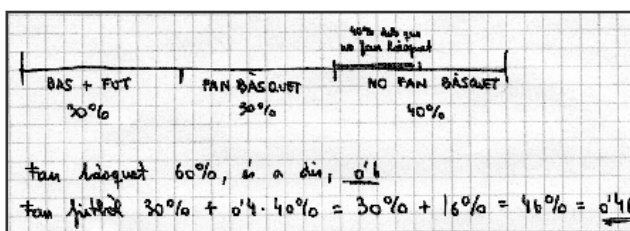
55%

Ejemplo 5

$\begin{cases} A \rightarrow 50\% \\ B \rightarrow 45\% \\ A \cap B \rightarrow 40\% \end{cases}$

$50 - 40 = 10$
 $45 - x = 10 \rightarrow x = 35$

Ejemplo 6



Ejemplo 7

Basket + Futbol $\rightarrow$ 30%
 Basket $\rightarrow$ 30%
 No fan Basket $\rightarrow$ 40%
 Futbol $\rightarrow$ 40% del 40% $\rightarrow$ 16%
 Basket $\rightarrow$ 30% + 30% = 60%
 Futbol $\rightarrow$ 30% + 16% = 46%

Ejemplo 8