

UNA EXPLORACIÓN DEL CONCEPTO DE PROBABILIDAD CON MAPAS CONCEPTUALES EN ESTUDIANTES DE BACHILLERATO. IMPLICACIONES PARA LA ENSEÑANZA.

Rosa Valero; M^a Ángeles Lonjedo.

1. INTRODUCCIÓN

Esta pequeña investigación es el resultado del trabajo experimental realizado como parte del curso de Doctorado en Didáctica de las Matemáticas titulado Los Mapas Conceptuales en Educación Matemática. Durante el curso elaboramos mapas conceptuales con la finalidad de estudiar el potencial de esta herramienta, para los profesores y los alumnos, para el proceso de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas, en un doble sentido, como organizador de una estructura matemática y como herramienta para la evaluación. Nosotras nos encargamos de realizar un mapa conceptual sobre el concepto de Probabilidad. Por lo tanto el objetivo del curso fue doble: por un lado construir el mapa conceptual de “expertos” y, por otro, realizar una investigación con estudiantes basándonos en ese mapa.

Lo que describimos en este trabajo, son algunos elementos usados para la investigación y que tienen que ver con: nociones sobre mapas conceptuales en Matemáticas, el concepto de probabilidad en el currículo de Bachiller, el método para obtener y evaluar los mapas de los alumnos, y las conclusiones a las que nos conducen esos elementos.

2. MAPAS

Un mapa conceptual es un recurso esquemático para representar un conjunto de significados conceptuales incluidos en una estructura de proposiciones, (Novak y Gowin, 1988).

Con otras palabras, un mapa conceptual es una forma gráfica de representar la organización del llamado conocimiento declarativo o estructural. Su aspecto es de un grafo con nodos y aristas. En un mapa conceptual los nodos se corresponden con los conceptos en un dominio y las aristas denotan la relación entre un par de conceptos. Estas relaciones las distinguimos con etiquetas, que nos indican cómo están relacionados esos conceptos, (Galán; Granell y Huerta, 2002)

Distinguimos mapa conceptual en Matemáticas porque en la actualidad se utiliza la expresión de mapa conceptual con diferentes significados, y todos ellos tienen en común el hecho de representar gráficamente el conocimiento y la organización de una determinada estructura conceptual. Un mapa conceptual de matemáticas es un mapa conceptual como lo define Ruiz-Primo (2000), en el que lo que se representa son conceptos matemáticos que dan lugar a proposiciones matemáticas. Dichas relaciones pueden servir tanto para definir el concepto matemático en su relación con otro, como para establecer proposiciones entre conceptos susceptibles de ser demostradas o probadas (Galán; Granell y Huerta, 2002), es decir, a las que se les puede medir su grado de verdad.

Para construir un mapa conceptual no existe un conjunto de instrucciones que deban seguirse, sin embargo cabe la posibilidad de tener en cuenta las siguientes etapas (Huerta.,2001):

- a) Identificar los conceptos más importantes del dominio.
- b) Clasificarlos desde los más generales hasta los más específicos.
- c) Relacionarlos según la clasificación.

Nosotras entendemos que los mapas conceptuales son instrumentos útiles en el proceso de enseñanza-aprendizaje, tanto para los profesores como para los alumnos. Por un lado es importante que el profesor llegue a estructurar cualquier unidad de docencia mediante un mapa conceptual, como experto, pues de esta forma se llega a ser consciente de **qué es** lo que se quiere enseñar. Por el lado de los estudiantes, el hecho de llegar a construir su mapa conceptual de cada unidad ayuda a reflexionar sobre los nuevos conceptos y a relacionarlos con conceptos anteriores, de forma que su conocimiento se revisa y se le da significado. En una palabra, posibilita la metacognición. De esta forma se aproxima a lo que se suele llamar aprendizaje significativo. (Ausubel, 1976)

Los mapas conceptuales reflejan la estructura psicológica del saber, por esa razón podemos distinguir entre el mapa realizado por un experto y el mapa realizado por un estudiante. En el mapa de expertos asumimos una organización ideal del dominio, organización que por el hecho de ser expertos no está exenta de discusión.

Nosotras al realizar el mapa de expertas sobre la probabilidad hemos pretendido buscar una organización ideal basada en la teoría de la probabilidad, para seleccionar una de las partes trabajada en el currículo de bachiller.

3. EL CONCEPTO DE PROBABILIDAD EN EL BACHILLERATO

Según el currículo de bachillerato antiguo, el concepto de probabilidad y los procesos de asignación de probabilidad se trabajan en :

Bachiller de Tecnología y de Naturaleza y Salud.

Matemáticas I:

Probabilidad:

- Medida de la incertidumbre. Asignación de probabilidades.

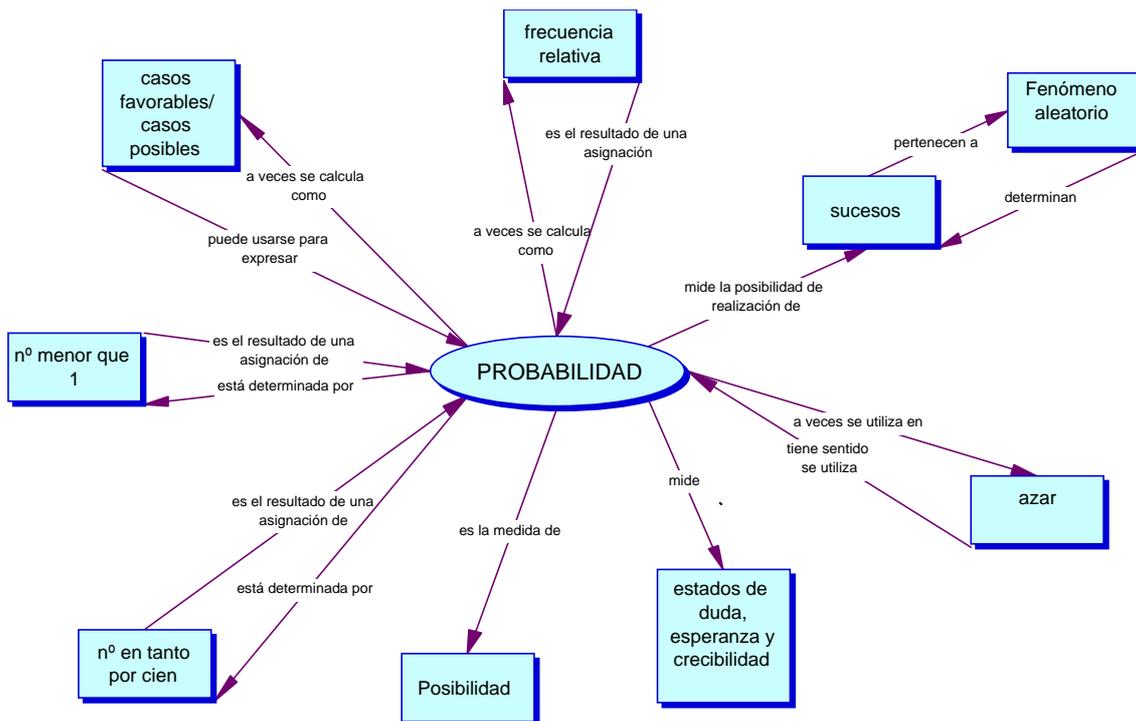
Bachiller de Humanidades.

Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I:

Probabilidad:

- Medida de la incertidumbre. Asignación de probabilidades.

Nosotras hemos elegido los conceptos que se relacionan con el concepto de probabilidad y la asignación de probabilidad.



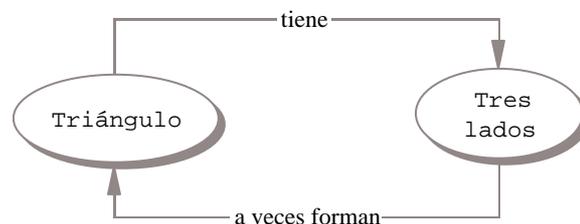
4 METODOLOGÍA

- **CONTEXTO:** Nuestra experimentación ha sido realizada con un grupo de cinco estudiantes del I.E.S. de Benigànim. Hemos elegido a cinco estudiantes de 2º de Bachiller, que cursan la asignatura de Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II ya que alguna vez en su vida escolar han trabajado el concepto de probabilidad. Además pensamos que a partir de este trabajo podemos mejorar el proceso de enseñanza/aprendizaje de dicho concepto, sobre todo con estos alumnos, pues es un concepto que pertenece al bloque III de la asignatura.. Les hemos explicado el porqué de nuestra investigación y si querían participar en ella. Los cinco nos han dado su conformidad y nos da la impresión de que se sienten orgullosos al colaborar en nuestro trabajo.
- **LOS ESTUDIANTES:** Estos cinco estudiantes han sido elegidos según sus calificaciones en la asignatura y teniendo en cuenta las del curso pasado, de forma que la muestra sea representativa para que nuestra investigación sea útil. Hemos elegido a un alumno con la asignatura pendiente de 1º de bachiller, Juan y además este alumno ha estudiado sólo 4º ESO; pues repetía 2º de BUP. Otro de nuestros estudiantes es alumno repetidor de otro centro, Mario. El tercer estudiante elegido es un alumno con sobresaliente en la asignatura en los dos cursos, Diego. También hemos elegido una estudiante con expediente de aprobado, Inmaculada y otra estudiante de buen expediente, Inés.
- **OBTENCIÓN DE MAPAS:** Como nuestros alumnos no habían realizado nunca un mapa conceptual, y el hecho de practicar primero en la elaboración de mapas suponía mucho tiempo, del que no disponíamos, construimos un test de respuesta múltiple como

instrumento utilizado para la recogida de datos. Pensamos que les facilitaríamos el trabajo si les ofrecíamos los conceptos y los nexos que queríamos que relacionaran en forma de frases casi hechas, con un concepto al principio y otro al final, y un conjunto de posibles relaciones entre los dos conceptos, para elegir la/las más apropiada/s, o crear una propia, con el fin de dotar de significado a la proposición. Bunge (19...), considera que la significación de una oración es una proposición, independientemente de cómo se enuncia ésta. Además pensamos que de esta forma, una vez respondido el test, nosotras construimos el mapa correspondiente a cada alumno.

- Este test lo hemos administrado a nuestros cinco estudiantes durante 40 minutos con unas aclaraciones previas sobre qué es y cómo queríamos que contestaran el test:

a) Explicación mediante un ejemplo.



- b) Si hay orden de lectura en la relación, utilización de flechas.
- c) Si el orden es indistinto, entonces se utiliza la doble implicación
- d) Si no se es capaz de establecer una relación no se hace.
- e) Si se piensa que dos conceptos están relacionados pero no se es capaz de etiquetar la relación, no se etiqueta.
- f) Si los nexos que aparecen no son suficientes se crean nuevos.

- Los alumnos tenían un tiempo máximo de 40 minutos para realizar el test, de los cuales sólo emplearon 20 m.
- Una vez recogidos todos los test, nosotras hemos elaborado, a partir de las respuestas, el mapa conceptual de cada uno de los estudiantes.
- Para preparar cada entrevista clínica, hemos elegido, de cada estudiante, las relaciones que más nos han llamado la atención, sobre todo por no entender demasiado lo que nos querían decir, que junto con el mapa conceptual de cada uno han sido la base de las entrevistas. Realizamos las entrevistas con el fin de obtener evidencias sobre sus capacidades de realización de metacognición y sobre sus conocimientos en probabilidad.

ALGUNOS RESULTADOS QUE TIENEN IMPLICACIONES

Realizamos primero un análisis cualitativo de toda la información que tenemos de los estudiantes, sus mapas y las entrevistas clínicas.

Vamos a ir analizando cada uno de los ítems que hemos presentado anteriormente, según las respuestas obtenidas por los estudiantes.

- Veamos el primer ítem:

ÍTEM 1.

La probabilidad a veces se calcula como $\frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$.

$\frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$ puede usarse para expresar probabilidad.

Todos nuestros alumnos han relacionado estos conceptos, pero, curiosamente, solamente lo han hecho en un sentido: Probabilidad \longrightarrow $\frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$. En la dirección

contraria, únicamente, un alumno lo ha relacionado, afirmando que con $\frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$ se calcula la probabilidad.

A raíz de las entrevistas clínicas, nos damos cuenta que el concepto $\frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$ es el que mejor recuerdan en relación con probabilidad. Además, es lo único que utilizan para asignar la probabilidad a un suceso, lo cual está, posiblemente, en coherencia con lo que se les ha enseñado.

Analizamos el segundo ítem:

ÍTEM 2.

Los fenómenos/experimentos aleatorios determinan sucesos.

Los sucesos pertenecen a los fenómenos aleatorios.

El concepto de fenómeno aleatorio lo entienden como algo “mágico”. A pesar de que la mayoría lo han relacionado en el sentido “los sucesos determinan el fenómeno aleatorio”, pensamos que ninguno tiene claro qué es un fenómeno aleatorio, pues en las entrevistas queda latente.

Leemos un trocito de la entrevista con Diego:

Alumno.- Los fenómenos aleatorios puede que a veces, bueno, a veces no...

Profesora.- Mediante un ejemplo, a lo mejor, puedes explicarlo mejor...

Alumno.- Depende de lo que pase en un experimento, a lo mejor no siempre, pero si se siguen los mismos pasos de eso, en un suceso pasará parecido o igual.

Profesora.- En un ejemplo, ¿cómo lo dirías?

Alumno.- ¿En un ejemplo?

Profesora.- Un ejemplo de un fenómeno aleatorio.

Alumno.- Un fenómeno aleatorio, pues, que si a ver

Profesora.- Para ti, ¿qué es un fenómeno aleatorio?

Alumno.- Un fenómeno aleatorio es un experimento que se hace en un laboratorio, por ejemplo, algo que está controlado....

Profesora.- ¿El lanzamiento de una moneda es un experimento aleatorio?

Alumno.- Sí.

Profesora.- *No se hace necesariamente en un laboratorio*

Alumno.- *En un laboratorio no, que está controlado por alguien, por ejemplo, en una moneda...*

Profesora.- *Los sucesos, ¿cuáles son?*

Alumno.- *Los sucesos son: que salga cara o cruz.*

Profesora.- *Vale. Pero eso depende de...*

Alumno.- *Pero eso depende de cómo esté la moneda, que salga de una manera u otra.*

Profesora.- *Y un fenómeno aleatorio, ¿puede ser ... el tiempo de mañana?*

Alumno.- *Sí.*

Profesora.- *Y... tampoco está controlado por nadie, ¿no?*

Alumno.- *No, no está controlado por nadie.*

Profesora.- *¿Y determinaría algún suceso?*

Alumno.- *Sí.*

Profesora.- *¿Qué sucesos serían?*

Alumno.- *Que llueva o que no llueva.*

También nos llama la atención la entrevista de Inés:

Profesora.- *Más cosas, los fenómenos aleatorios determinan los sucesos. ¿Determinan y provocan? Provocan es un nexo que tu escribiste ...*

Alumna.- *Porque entendí como un fenómeno aleatorio un fenómeno que pasa y que como es extraño, siempre lo investigan y provoca un suceso*

Profesora.- *¿Uno, muchos, o ...?*

Alumna: *Muchos...*

Profesora: *Un ejemplo de esto*

Alumna: *Yo pensé en , por ejemplo, cuando ves un planeta, se hacen muchos experimentos, por ejemplo, lo que ha pasado últimamente, han descubierto un planeta que tiene atmósfera, ahí habrá más de un suceso, y ahora empiezan con que si habrá vida, con que si no puede haber porque está cerca del sol, unos pensarán que no puede haber porque está cerca del sol, pero hay otros que piensan que sí que hay*

Profesora: *¿Y cada uno de esos pensamientos es un suceso para ti?*

Alumna: *No sé, ..., creo que lo mismo, “un esdeveniment”*

El análisis de este periodo de la entrevista nos reafirmamos en la creencia de que la magia, lo “rarito”, forma parte de los conocimientos de los alumnos acerca de la probabilidad.

También pensamos que el concepto de suceso tampoco lo tienen demasiado claro, pues lo relacionan con los resultados al lanzar una moneda, un dado, de un examen, de un partido de fútbol, ..., pero no lo relacionan, por ejemplo, con el tiempo que pueda hacer mañana. Quizás entienden el suceso como el resultado de un generador de azar relacionado con los juegos de azar, pero el tiempo de mañana es demasiado “científico” para ser resultado del azar. Leemos lo que nos cuenta Juan:

Profesora.- *Todo, por ejemplo, para ti el tiempo de mañana es un fenómeno que se puede medir mediante la probabilidad, ¿no?*

Juan.- *No, el tiempo no.*

Profesora.- *No, ¿por qué?*

Juan.- *Porque el tiempo es una cosa que está estudiada, y se sabe que si hay un anticiclón o una borrasca ya sabes seguro o casi seguro que va a pasar, porque hay unas condiciones que hacen que eso pase, por eso no es lo mismo esto que a lo que yo me estoy refiriendo que es la probabilidad. Esto del tiempo yo no lo considero como probabilidad, yo*

considero como probabilidad, por ejemplo, suspenderé tres esta evaluación. Eso es una probabilidad que depende de matemáticas, de biología, ... de mi.

- Recordamos el tercer ítem y lo analizamos:

ÍTEM 3.

Número menor que 1 es el resultado de una asignación de probabilidad.

La probabilidad está determinada por un número menor que 1.

Los estudiantes que han llegado a relacionar estos conceptos de probabilidad y nº menor que 1, lo han hecho en un único sentido:

Nº menor que 1 \longrightarrow Probabilidad.

- Veamos el cuarto ítem:

ÍTEM 4.

Número en tanto por ciento es el resultado de una asignación de probabilidad.

La probabilidad está determinada por un número en tanto por ciento.

Nuestros estudiantes han relacionado estos conceptos en el sentido: el tanto por cien

$\left. \begin{array}{l} \text{a veces expresa} \\ \text{mide} \\ \text{determina} \\ \text{expresa} \\ \text{puede referirse} \end{array} \right\}$ la probabilidad, pues de alguna forma tienen asimilada la típica frase: “un

x% de probabilidad de que ocurra...”.

Por otro lado, un estudiante nos dice “La probabilidad da un nº en tanto por ciento”

A pesar de no haber pedido la relación entre número menor que 1 y número en tanto por cien, hemos observado, gracias a las entrevistas clínicas, que para ellos un tanto por cien es un número grandísimo. En estas entrevistas, les hemos hecho reflexionar sobre esta relación.

Vemos lo que nos cuenta Juan:

Profesora.- Pero, ¿qué pasa con el tanto por ciento? Dices que no están relacionados. ¿Cómo lo explicarías?

Alumno.- El tanto por ciento no está relacionado con la probabilidad, pues una cosa probable es algo que es probable pero que no es seguro, no es cierto que vaya a pasar. Entonces, porque el 30% o el 40% lo hagan no es preciso que lo haga cualquier persona, yo me refiero a que no es algo seguro. La probabilidad la considero como algo que no es cierto, que no es fiable. Entonces no puedes coger un tanto por cien como algo seguro.

Profesora.- Entonces, ¿no podemos decir que un suceso tenga una probabilidad del 30%?

Alumno.- Sí, claro que puedes decirlo, poderse se puede decir.

Profesora.- Y, una probabilidad del 30%, ¿qué querría decir?

Alumno.- Que de cada 100 veces, 30 veces pasa.

Profesora.- Que es un número menor que 1...

Alumno.- Sí, es un número menor que 1, claro

Mario también nos cuenta algo interesante relacionado con este ítem:

Profesora.- ¿Qué quiere decir expresa? Piensa, a lo mejor, expresa sí que tiene sentido, como dices tú...¿Cómo se expresa?¿Se expresa de alguna forma?...¿Qué forma tiene la probabilidad de expresarse? ... Dices también que “un número menor que 1 expresa probabilidad” y que “un número en tanto por ciento puede referirse a la probabilidad”

Alumno.- Hombre claro, tú puedes representar en tanto por ciento, y por ejemplo, si la probabilidad es menor que uno ya no es cierta la misma....

Profesora.- La probabilidad, ¿qué valor piensas que es el máximo que puede tomar?

Alumno.- En tanto por ciento, el 100%, y un número normal, un “SAC” (supongo que querrá decir que cualquier número tan grande como sea).

- Analicemos el quinto ítem:

ÍTEM 5.

La probabilidad es la medida de una posibilidad.

Para la mayoría de los alumnos, probabilidad ES posibilidad. Para ellos son conceptos sinónimos, y de ningún modo consideran que la probabilidad es la medida de una posibilidad. Esta reflexión es muy importante para nosotras, por lo tanto, como durante este curso estos alumnos van a trabajar la probabilidad, al iniciar este bloque intentaremos aclarar esta relación.

- El ítem sexto es:

ÍTEM 6.

La probabilidad mide los diferentes estados de una persona(duda, credibilidad, esperanza).

Probabilidad y estados de duda, credibilidad y esperanza, únicamente lo han relacionado en el sentido: Probabilidad → Estados de duda, credibilidad y esperanza.

Ninguno es capaz de relacionar la probabilidad como medida de los estados de duda, credibilidad y esperanza. Además, en las entrevistas clínicas, nos han hecho una reflexión digna de escuchar sobre la duda, la credibilidad y la esperanza. Por ejemplo Juan nos cuenta:

.- Porque la duda asigna una probabilidad, ¿no?, el otro (credibilidad) mide y el otro (esperanza) expresa. La duda y la credibilidad pueden estar muy relacionados, pero la esperanza yo creo que no está tan relacionado como la credibilidad. La esperanza no tiene nada que ver con la credibilidad porque la esperanza es algo que puede pasar, tú tienes esperanza de que algo pase, pero la credibilidad es algo casi seguro que va a pasar. Es algo creíble, no como la esperanza. Yo puedo tener la esperanza de ganar un partido de fútbol pero al acabar puedo ver que no era algo creíble puesto que éramos mucho peores que los contrarios.

- El ítem séptimo:

ÍTEM 7.

La probabilidad a veces se calcula mediante la frecuencia relativa.

La frecuencia relativa es el resultado de una asignación de probabilidad.

Lo que nos llama la atención es que no relacionan la probabilidad con la frecuencia relativa, únicamente un alumno relaciona estos dos conceptos. El resto de los estudiantes no recordaba del concepto de frecuencia relativa, a pesar de reconocer que les sonaba de algo. En las entrevistas clínicas volvimos a insistir en esta relación y las respuestas fueron las mismas.

- Analizamos el octavo ítem:

ÍTEM 8.

La probabilidad mide la posibilidad de realización de los sucesos.

Nos llama la atención cómo relacionan la probabilidad y los sucesos. Cuatro de estos alumnos dicen que la probabilidad expresa la posibilidad de un suceso y tres de ellos escriben que la probabilidad mide la posibilidad de un suceso. ¿Han elegido estos nexos “arreu” (como dicen ellos)? Es curioso que utilicen estos nexos cuando para ellos posibilidad es sinónimo de probabilidad.

- En cuanto al noveno ítem:

ÍTEM 9.

La probabilidad a veces se utiliza en azar.

El azar tiene sentido/se utiliza en probabilidad.

El azar lo relacionan con la probabilidad por los juegos. Dos estudiantes dicen que “el azar tiene sentido/se utiliza en la probabilidad”. Otros dos nos escriben que “Azar a veces es probabilidad”. No profundizan nada más. Como ejemplos de esta reflexión, Juan nos dice en la entrevista:

“Claro. El azar: la probabilidad es producto del azar, porque si tú no sabes una cosa al cien por cien, puede ser que pase o que no pase. Si tú tienes una cosa al 50% es cosa del azar, puede ser que pase y que no pase.”

Mario nos cuenta:

Profesora.- *La probabilidad, dice aquí, “sólo calcula juegos”. Esta es una relación que vas a escribir tú. Escribiste entre probabilidad y azar: “La probabilidad tiene sentido o se utiliza en Azar”; y después tú escribiste la relación: “la probabilidad sólo calcula juegos de azar”. Explica eso de “sólo calcula juegos”. ¿Sólo quiere decir nada más?*

Mario.- *Me confundí.*

Profesora.- *¿Te confundiste? ¿Por qué?*

Mario.- *Porque la probabilidad no sólo calcula azar. Puede calcular más cosas que azar, ¿no?*

Profesora.- *No sé, es un razonamiento tuyo.*

Mario.- *Es que la probabilidad tiene sentido y se utiliza en azar, pero no sólo en juegos de azar, también puedes calcular, por ejemplo, la probabilidad de aprobar un examen, la probabilidad de ganar un partido*

5. CONCLUSIONES

Si hemos de sacar una conclusión rápida al análisis cualitativo, podemos decir que aunque nuestros estudiantes ya han recibido alguna vez en su vida escolar instrucción sobre probabilidad, ésta o no ha calado en su conocimiento o lo que nos contestan en el test es coherente con la enseñanza que han recibido acerca de la probabilidad. Las causas de este problema detectado no podemos nombrarlas con total seguridad, pero podemos aventurarnos a

citar algunas, de forma que el asegurarlas puede ser tema de un futuro trabajo de investigación.

Estas posibles causas son:

- El profesor/profesora que ha efectuado el proceso de enseñanza/aprendizaje no ha tenido **claridad** en la transmisión de conceptos.
- Los pre-conceptos de los estudiantes en este tema pesan demasiado, y se hace muy difícil el cambio de concepción. Entendemos por pre-conceptos el significado que tienen para los estudiantes cualquier concepto matemático, antes de recibir instrucción. Pensamos que cuando un estudiante se enfrenta por primera vez en la clase de matemáticas ante un concepto, el conocimiento que lleva el estudiante es el que ha vivido. Un estudiante que jamás ha trabajado en el aula el concepto de probabilidad, ya tiene una concepción de la probabilidad que se la ha ido creando el ambiente en el que vive. Además en la sociedad actual esta concepción sobre la probabilidad es muy fuerte y siempre relacionada con los juegos de azar.
- Posiblemente, la probabilidad es un bloque situado al final de las programaciones, y esto unido a la dificultad de instrucción que podemos presentar los profesores, hace que este bloque sea uno a los que menos tiempo se dedique.

6. BIBLIOGRAFÍA

- Ausubel, D.P; Novak, J.D; Hanesian, H, 1976, *Psicología educativa*. (Trillas).
- DeGroot, M.H., 1988, *Probabilidad y Estadística*. (Sistemas Técnicos de Edición: México).
- Novak, J.D.; Gowing, D.B.,1988, *Aprendiendo a aprender*.(Martínez Roca: Barcelona).
- Galán, E.; Granell,R.; Huerta, M.P., 2002, *Los mapas conceptuales en educación matemática: antecedentes y estado actual de la investigación*. Universitat de València. (Documento no publicado)
- Huerta, M.P., 2001, Material trabajado en el curso de doctorado en Didáctica de las Matemáticas, Los Mapas Conceptuales en Educación Matemática.
- Ruiz-Primo (2001)