Probabilidad

Un **fenómeno** es **aleatorio** si conocemos todos sus posibles resultados pero no podemos predecir cual de ellos ocurrirá.
Cada uno de estos posibles resultados es un **suceso** elemental del fenómeno aleatorio.
Todos los sucesos elementales forman **el espacio muestral**.

Con los sucesos podemos operar, sean A y B dos sucesos, definimos:
$A \cup B$ como el suceso que resulta si ocurre A o B. Es la unión de sucesos
$A \cap B$ como el suceso que resulta si ocurren A y B a la vez. Es la intersección de sucesos

Podemos hacer una pequeña clasificación de los sucesos.
Suceso seguro: es el espacio muestral, E
Suceso imposible: es el $\varnothing$
Suceso complementario: A complementario de A, si $A \cup A = E$ y $A \cap A = \varnothing$, es decir, si A contiene a todos los sucesos elementales que no contiene A y no tienen nada en común.
Dos **sucesos A y B**, son **incompatibles** si $A \cap B = \varnothing$, es decir, si no pueden suceder a la vez.
Decimos que el suceso **A está incluido en el suceso B**, $A \subseteq B$, si cada resultado de A también es de B.

Probabilidad
La probabilidad es la medida de la posibilidad de realización de los sucesos.
Asignamos probabilidades a los sucesos por diferentes medios:
Asignación de probabilidades mediante la frecuencia absoluta: Si repetimos un fenómeno aleatorio un número n de veces en la mismas condiciones, y contamos que el suceso A aparece m veces, entonces podemos decir que $P(A) = \frac{m}{n}$, siendo m<n.

Asignación de probabilidades mediante la regla de Laplace. Laplace dice que la probabilidad de un suceso A es la razón entre el número de casos favorables y el número de casos posibles.. También podemos razonar este cociente diciendo que es la razón entre el número de sucesos elementales que tiene el suceso A y el número de sucesos elementales del espacio muestral.
Asignación subjetiva de probabilidades. Nosotros podemos decidir cual es la probabilidad de un suceso, por ejemplo basándonos en estudios estadísticos. Este tipo de asignación no es muy razonable, pues cada uno puede decidir una asignación diferente, y entonces la asignación de probabilidades deja de ser compartida por la comunidad científica.

La probabilidad de un suceso es un nombre que pertenece al intervalo [0, 1]

PROPIEDADES DE LA PROBABILIDAD:
$P(E) = 1$
$P(\varnothing) = 0$
$P(A) = 1 – P(A)$
La probabilidad de la diferencia de dos sucesos A y B es: $P(A-B)=P(A)-P(A \cap B)$.
Si $B \subseteq A$, entonces la diferencia es: $P(A-B)=P(A)-P(B)$.

$P(A\cup B) = P(A)+P(B)$ si A y B son incompatibles
Si A y B son dos sucesos cualesquiera: $P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.

Leyes de Morgan: $\begin{cases} \overline{A} \cap \overline{B} = \overline{(A \cup B)} \\ \overline{A} \cup \overline{B} = \overline{(A \cap B)} \end{cases}$

Propiedad distributiva: $\begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{cases}$

FENÓMENO COMPUESTO: Decimos que un fenómeno aleatorio es compuesto si está formado por dos o más fenómenos aleatorios simples.

SUCESOS INDEPENDIENTES: Dos sucesos A y B son independientes si se cumple que $P(A\cap B) = P(A).P(B)$. En caso contrario decimos que los sucesos A y B son dependientes.

TÉCNICAS COMBINATORIAS DE CONTEO

<u>Permutaciones</u>: Utilizaremos esta técnica cuando necesitemos hacer grupos con n elementos. Calculamos las permutaciones de n elementos:
$\boxed{P_n = n! = n.(n-1).(n-2).\ldots .3.2.1}$.
Estos grupos se diferencian en el orden de los elementos.

<u>Variaciones</u>: Utilizaremos esta técnica cuando necesitemos hacer grupos de m elementos con los n elementos que tenemos (m<n). Calculamos las variaciones de n elementos cogidos de m en m:
$\boxed{V_{n,m}=n.(n-1).(n-2).\ldots .(n-m+1)}$.
Dos variaciones son diferentes si sus elementos son diferentes o están ordenados de distinta forma.

<u>Variaciones con repetición</u>: Utilizaremos esta técnica cuando necesitemos hacer grupos de m elementos con los n elementos que tenemos, pudiendo repetir los elementos. Calculamos las variaciones con repetición de n elementos cogidos de m en m:
$\boxed{VR_{n,m}=n^m}$.
Dos variaciones son diferentes si sus elementos son diferentes o están ordenados de forma diferente.

<u>Combinaciones</u>: Utilizaremos esta técnica cuando necesitemos hacer grupos de m elementos con los n elementos que tenemos y sin tener en cuenta el orden de los elementos Calculamos las combinaciones de n elementos cogidos de m en m:
$$\boxed{C_{n,m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \binom{n}{m}}.$$
Dos combinaciones son diferentes si sus elementos son diferentes.

Problemas de autoaprendizaje:

1. Juan y Pepa están jugando al juego de piedra, papel o tijeras. Este juego determina un fenómeno aleatorio. Entonces:

a) Describe el espacio muestral del juego.
b) ¿Cuál es el resultado más probable?
c) Calcula la probabilidad de sacar (piedra, tijeras)

Solución:

a) Podemos describir el espacio muestral con la tabla siguiente:

JUAN	PEPA
🗏	✂
🗏	❖
🗏	🗏
✂	✂
✂	❖
✂	🗏
❖	✂
❖	❖
❖	🗏

b) No hay ningún resultado más probable. Todos los resultados son igualmente probables.
c) Para calcular la probabilidad de (piedra, tijeras) contamos el nº de resultados posibles: 9, y el nº de resultados favorables: 1. Por tanto la probabilidad buscada es: $\frac{1}{9}$

2. Lanzamos dos dados. Calcula la probabilidad de sacar 6 y de sacar suma par. Si hicieras una apuesta, ¿por cuál resultado apostarías?

Solución:

Lo primero que hacemos es describir el espacio muestral determinado por el lanzamiento de dos dados, sin tener en cuenta el orden de los dados, pues los lanzamos a la vez y no los podemos diferenciar:

1 → 1 ⟶ (1, 1) suma 2
1 → 2 ⟶ (1, 2) suma 3
1 → 3 ⟶ (1, 3) suma 4
1 → 4 ⟶ (1, 4) suma 5
1 → 5 ⟶ (1, 5) suma 6
1 → 6 ⟶ (1, 6) suma 7
2 → 2 ⟶ (2, 2) suma 4
2 → 3 ⟶ (2, 3) suma 5
2 → 4 ⟶ (2, 4) suma 6
2 → 5 ⟶ (2, 5) suma 7
2 → 6 ⟶ (2, 6) suma 8
3 → 3 ⟶ (3, 3) suma 6
3 → 4 ⟶ (3, 4) suma 7
3 → 5 ⟶ (3, 5) suma 8
3 → 6 ⟶ (3, 6) suma 9
4 → 4 ⟶ (4, 4) suma 8
4 → 5 ⟶ (4, 5) suma 9
4 → 6 ⟶ (4, 6) suma 10
5 → 5 ⟶ (5, 5) suma 10
5 → 6 ⟶ (5, 6) suma 11
6 → 6 ⟶ (6, 6) suma 12

Tenemos que hacer el conteo de todos los resultados posibles: {suma 2 (1), suma 3 (1), suma 4 (2), suma 5 (2), suma 6 (3), suma 7 (3), suma 8 (3), suma 9 (2), suma 10 (2), suma 11 (1), suma 12 (1)}. Tenemos en total 21 resultados posibles.
En primer lugar nos piden calcular la probabilidad de que la suma sea seis, por tanto tenemos que contar de cuantas formas puede salir el seis. Si miramos el árbol que describe el espacio muestral nos damos cuenta que la suma puede ser sei de 3 formas: (1,5), (2,4) y (3,3). La probabilidad buscada es: $\frac{3}{21}=\frac{1}{7}$
También nos piden la probabilidad de sacar suma par. Hacemos el conteo de los casos favorables de este suceso y salen: {suma 2 (1), suma 4 (2), suma 6 (3), suma 8 (3), suma 10 (2), suma 12 (1)}. Un total de 12 casos favorables. Calculamos la probabilidad de que la suma sea par: $\frac{12}{21}=\frac{4}{7}$
Si tuviera que hacer una apuesta, la haría al resultado o resultados que aparecen más: suma 6 (3), suma 7 (3), suma 8 (3). Cualquiera de estas sumas tienen la misma probabilidad:
P(suma 6) = $\frac{3}{21}=\frac{1}{7}$ = P(suma 7) = P(suma 8).
En caso de poder hacer la apuesta no a una suma concreta, sino por ejemplo a suma par o impar, o múltiplo de cualquier número, repasando el espacio muestral y los resultados que tenemos hasta el momento, el más probable es que la suma sea par, por tanto apostaría a este resultado.

3. Sean A y B dos sucesos de un fenómeno aleatorio. Conocemos que P(A)=2/5, P(B)=5/9 y P(A∪B)=11/15. Calcula:

a) La probabilidad de que sucedan A y B
b) La probabilidad de que sucedan A y B.
c) La probabilidad de que no suceda A o no suceda B

Solución:
a) Lo que se nos pide en este apartado es la probabilidad del suceso intersección: P(A∩B)
Nosotros conocemos que para cualquier par de sucesos se cumple:
P(A∪B) = P(A)+P(B)-P(A∩B)
En el enunciado tenemos los siguientes datos: P(A)=2/5, P(B)=5/9 y P(A∪B)=11/15. Entonces, sustituyendo en la fórmula anterior:
11/15 = 2/5+5/9- P(A∩B) → P(A∩B)= 2/5+5/9-11/15 → P(A∩B)=2/9
b) P(A∩B) = P(A-B)=P(A)-P(A∩B)=2/5-2/9=8/45

Por la diferencia de dos sucesos

c) P(A∪B)= $P(\overline{A\cap B})$ =1-P(A∩B)=1-2/9=7/9

Por las leyes de Morgan

4. En nuestro armario tenemos 6 sombreros, 3 negros y 3 blancos, 5 camisas, 3 negras y 2 blancas y 5 faldas, 2 negras y 3 blancas. ¿De cuantas formas diferentes nos podemos vestir?. Pero, no me gusta llevar dos piezas negras, ¿de cuantas formas me puedo vestir?. Si quiero coger uno de estos conjuntos que me puedo hacer con la ropa que tengo en el armario, ¿cuál es la probabilidad de que sea de los que me gustan?
En el primer caso, por cada sombrero me puedo poner cinco camisas:
6 sombreros x5camisas=30 parejas
Y por cada una de estas parejas puedo elegir cinco faldas:

30 parejasx5 faldas=**150 conjuntos de ropa**
Ahora decidimos no ponernos dos piezas negras:

3 sombreros negros
- 2 faldas negras NO PUEDE SER
- 3 faldas blancas
  - 3 camisas negras NO PUEDE SER
  - 2 camisas blancas

3 sombreros blancos
- 2 faldas negras
  - 3 camisas negras NO PUEDE SER
  - 2 camisas blancas
- 3 faldas blancas
  - 3 camisas negras
  - 2 camisas blancas

Si cogemos los caminos posibles obtenemos:
3x3x2 + 3x2x2 + 3x3x3 + 3x3x2 = 18 + 12+ 27 + 18 =75 conjuntos de ropa, donde no hay dos piezas negras.
Para encontrar la probabilidad, utilizaremos la fórmula de Laplace: si A es el suceso “que el conjunto me guste”, $P(A)=\frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$.
Nuestros casos posibles son los 150 conjuntos que puedo hacer con la ropa del armario, y los casos favorables son los 75 conjuntos que me gustan porque no llevan dos piezas negras. Por tanto la probabilidad buscada es: $P(A)=\frac{75}{150}=\frac{1}{2}$

5. Nos gusta bastante la palabra AMOR. ¿Cuantas palabras, con significado o sin el, podemos formar con estas letras?. Imaginamos que tenemos todas estas palabras dentro de una bolsa y sacamos una palabra, ¿cuál es la probabilidad de que sea ROMA?, ¿cuál es la probabilidad de que empiece con la sílaba RO?, ¿cuál es la probabilidad de que empiece por R?.
Para conocer la cantidad de palabras que podemos formar con las letras de la palabra AMOR, hacemos un análisis del tipo de agrupamiento que queremos hacer: importa el orden y todos los grupos deben tener todos los elementos. Por tanto utilizaremos las permutaciones de los cuatro elementos:
P4 = 4! = 24 palabras podemos formar.
Para calcular las probabilidades pedidas, utilizaremos la fórmula de Laplace: $P(A)=\frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}}$
En el primer caso, solo tenemos un favorable. De las 24 palabras que podemos formar con las letras de la palabra AMOR, solo tenemos una palabra ROMA. La probabilidad buscada es: $P(ROMA)=\frac{1}{24}$
Del segundo caso, contaremos cuantas de estas 24 empiezan por RO: solo nos quedan dos letras, a y m, para ocupar los dos lugares: AM, MA. Entonces tenemos dos casos favorables: $P(RO--)=\frac{2}{24}=\frac{1}{12}$
En el último caso tenemos: R _ _ _: tres elementos de tres en tres: P3 = 3! = 6 casos favorables: $P(R---)=\frac{3}{24}=\frac{1}{8}$.

6. Vamos a jugar al siguiente juego: lanzamos un dado tres veces y sumamos las puntuaciones. Calcula la probabilidad de obtener 11.

Solución:

Los casos posibles son todos los conjuntos de tres elementos que se pueden hacer con los 6 elementos del dado. Además pueden ocurrir repeticiones:

$$VR_{6,3} = 6^3 = 216$$

Los casos favorables son los conjuntos de tres que suman 11:

{1, 4, 6}, {1, 5, 5}, {2, 3, 6}, {2, 4, 5}, {3, 3, 5}, {3, 4, 4}. Como el orden es importante, en los conjuntos en donde no se repite ningún elemento pueden aparecer de 3!=3.2.1=6 formas diferentes. y los conjuntos en donde se repite un elemento pueden aparecer de 3 formes diferentes. Por ejemplo el conjunto {1, 5, 5}, también puede aparecer de la forma {5, 1, 5} y de la forma {5, 5, 1}.

Tenemos tres conjuntos de cada una de les características de arriba. Entonces el número de casos favorables es:

3.3! + 3.3 = 3.6+3.3=18+9=27

Aplicando la regla de Laplace para calcular la probabilidad pedida:

$$\frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{27}{216} = \frac{1}{8}$$

Problemas:

1.
   a) Describe el espacio muestral determinado por el fenómeno aleatorio del lanzamiento de un dado.
   b) Describe los sucesos siguientes: A: Sacar un número par; B: Sacar múltiplo de 3, C: Sacar un número impar.
   c) Asigna probabilidades a cada uno de los sucesos del apartado b.
2.
   a) Describe el espacio muestral determinado por el fenómeno aleatorio del lanzamiento de dos monedas.
   b) Describe los siguientes sucesos: A: Sacar cara al menos una vez; B: Sacar dos cruces; C: Sacar dos caras.
   c) ¿Son A y B sucesos complementarios?
   d) Asigna probabilidades a cada uno de los sucesos del apartado b

3. Sea el fenómeno aleatorio determinado por la extracción de una carta de una baraja española. Escribe los siguientes sucesos y asígnales probabilidad:
   a) Sacar figura
   b) Sacar oros.
   c) Sacar reyes
   d) El suceso contrario al suceso del primer apartado.

4. Tenemos un dado con les caras pintadas cada una de un color diferente: rojo, amarillo, azul, naranja, verde y violeta. Lanzamos el dado una vez. Sean los siguientes sucesos: Que salgan los colores primarios :F={rojo, azul, amarillo}, Que salga azul o naranja: G={azul, naranja}, Que salgan los colores secundarios: H ={violeta, verde, naranja}, Que salga un par de colores complementarios: I={rojo, verde}.
   a) Describe los siguientes sucesos : $F \cup G$, $F \cap G$.
   b) Escribe dos sucesos compatibles.

c) Escribe dos sucesos incompatibles.
d) ¿F tiene suceso contrario ?
e) ¿Cómo formarías el suceso seguro de este fenómeno aleatorio? (Ayuda: lo puedes formar con unión de sucesos)
f) ¿Cómo formarías el suceso imposible de este fenómeno aleatorio? (Ayuda: lo puedes formar con intersección de sucesos)
g) Asigna probabilidad a los sucesos de los apartados a, b, c y d.

5. Calcula la probabilidad de que el producto de las puntuaciones en el lanzamiento de dos dados sea:
   a) Mayor o igual que cinco.
   b) Impar
   c) Par

6. Vamos por la calle y nos damos cuenta que hay un hombre con más gente haciendo un juego. El juego consiste en una mesa con tres tazas encima y bajo de una de las tazas hay una bolita. El hombre, que parece el jefe, pide que la gente apueste donde está la bolita. Baraja las tazas a mucha velocidad, y una vez bien barajadas pide a la gente que le digan donde está la bolita.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de adivinar donde está?
   b) ¿Y si hubiera dos tazas con bolitas y la tercera sin bolita?

7. Calcula la probabilidad de conseguir cuatro puntos si elegimos aleatoriamente una ficha de domino.

8. Elegimos por sorteo un número del 1 al 63000. Calcula la probabilidad de que sea múltiplo de 2, de 3 y de 5.

9. Sean A y B dos sucesos de un fenómeno aleatorio. Conocemos que P(A)=1/3, P(B)=1/5 y $P(A\cup B)=7/15$. Calcula:
   a) La probabilidad de que sucedan A y B
   b) La probabilidad de que sucedan A y B.
   c) La probabilidad de que no suceda A o no suceda B

10. ¿Cuántas personas asisten a un congreso de lenguas sabiendo que hay 128 personas que hablan inglés, 99 que hablan francés y, de entre ellas, 47 hablan dos lenguas?

11. Si hacemos una quiniela de quince resultados, cuál es la probabilidad de acertar?

12. Ahora hacemos una lotería primitiva de jueves. ¿Cuál es la probabilidad de acertar?

13. En qué juego, quiniela o lotería primitiva, es más fácil ganar?

14. Estaba leyendo el periódico y he encontrado la tabla siguiente, que muestra el estudio del color del pelo de 165 mujeres y hombres elegidos aleatoriamente en mi pueblo:

personas	**he encontrado**
mujer con pelo castaño	55
hombre con pelo castaño	53
mujer con pelo rubio	10
hombre con pelo rubio	12

mujer con pelo negro	18
hombre con pelo negr0	17

Según estos datos totalmente fiables, ¿cuál es la probabilidad de que la primera persona que encuentre en la calle sea un hombre con el pelo rubio? ¿Y una mujer con el pelo negro?

15. En clase hay un estuche con 25 lápices, 15 de color rojo y 10 de color azul. Si cogemos dos lápices, cuál es la probabilidad de que los dos sean azules?. Calcula también la probabilidad de que el primero sea azul y el segundo sea rojo.

16. Tenemos una baraja española y sacamos dos cartas. ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos ases? ¿Y si devolvemos la primera carta a la baraja antes de hacer la segunda extracción?

17. Un estudiante ha preparado 40 temas de los 50 que entran en el examen. Si el examen consiste en elegir tres temas al azar y contestar a uno de ellos, calcula las siguientes probabilidades:
    a) Que no sepa ninguno de los temas.
    b) Que sepa al menos uno.
    c) Que sepa los tres.

18. Una urna contiene 5 bolas rojas, 3 verdes y 2 blancas. Sacamos al azar y a la vez dos bolas, calcula la probabilidad de que:
    a) Las dos sean del mismo color.
    b) Al menos una sea roja.

19. La probabilidad de que un hombre viva pasados 25 años es 6/25 y la probabilidad de que su mujer viva pasados los 25 años es de 9/25. Calcula la probabilidad de que, transcurridos los 25 años:
    a) Vivan los dos
    b) No viva ninguno.
    c) Sólo viva el marido
    d) Sólo viva la mujer.

20. En una caja tenemos 68 clavos de cabeza grande y 32 de cabeza pequeña. Elegimos dos clavos al azar, calcula la probabilidad de que sean:
    a) ambos de la misma clase
    b) de diferente clase.