POLINOMIOS. División. Regla de Ruffini.

Recuerda:

Un monomio en x es una expresión algebraica de la forma $a \cdot x^n$ tal que a es un número real y n es un número natural. El real a se llama coeficiente y n se lama grado del monomio.
Ejemplo: $4x^3$ es un monomio en la variable x de grado 3 y coeficiente 4.
Un polinomio es la suma de dos o más monomios. Los binomios son suma de dos monomios y los trinomios son suma de tres monomios.
El grado de un polinomio es el mayor de los grados de los monomios que lo forman.
Ejemplo: $-2x^4 + 3x^2 + x - 4$ es un polinomio de grado 4 y de coeficientes $(-2, 0, 3, 1, -4)$ el coeficiente principal es –2 y el término independiente es -4
Monomios semejantes son los que tienen la misma parte literal.

Operaciones de polinomios:
Sumamos polinomios sumando los monomios semejantes.

Multiplicamos polinomios multiplicando cada monomio de uno de los factores por todos los monomios del otro factor y después sumamos los monomios semejantes.

Dividir dos polinomios $A(x) : B(x)$ es determinar dos polinomios $Q(x)$ cociente y $R(x)$ resto tales que cumplan:

a) $A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$ dividendo es igual a divisor por cociente más el resto.

b) $\text{grau } R(x) < \text{grau } B(x)$ grado del resto es menor que el grado del divisor.

Grado(cociente)=grado(dividendo)$-$grado(divisor)
Una división es exacta si el resto es cero R(x)=0

Valor de un polinomio $A(x)$ para $x = a$ es sustituir el valor x del polinomio por el número real a. Se representa por $A(a)$
Ejemplo:

$$A(x) = 3x^3 + 2x^2 - 4x + 1$$
$$A(-2) = 3 \cdot (-2)^3 + 2 \cdot (-2)^2 - 4 \cdot (-2) + 1 = -24 + 8 + 8 + 1 = -7$$

Teorema del Resto:
El resto de dividir el polinomio P(x) entre el monomio $x - a$ es igual al valor numérico del polinomio para $x = a$, es decir P(a).

Teorema del factor.
Un polinomio P(x) es divisible por el monomio $x - a$ si y sólo si el valor numérico del polinomio para $x = a$, es cero $P(a) = 0$

Método para dividir polinomios con una variable.

Se ordena el dividendo y el divisor según las potencias decrecientes de la variable.

Dividimos el término primero del dividendo entre el término primero del divisor, para obtener el primer término del cociente.

Multiplicamos el divisor por el primer término del cociente y le restamos al dividendo el resultado anterior para conseguir el primer resto parcial.

Repetimos el procedimiento haciendo ahora de dividendo el primer resto parcial.

La división finaliza cuando el grado del resto es menor que el grado del divisor.

Ejercicios de autoaprendizaje.

Ejercicio 1:

Divide $\left(6x^5 + x^4 + 4x^2 - 7x + 1\right) : \left(2x^2 + x - 3\right)$

$$
\begin{array}{rrrrrr|rrrr}
6x^5 & +x^4 & & +4x^2 & -7x & +1 & 2x^2 & +x & -3 & \\ \cline{7-10}
-6x^5 & -3x^4 & +9x^3 & & & & 3x^3 & -x^2 & +5x & -2 \\ \cline{1-6}
 & -2x^4 & +9x^3 & +4x^2 & -7x & +1 & & & & \\
 & 2x^4 & +x^3 & -3x^2 & & & & & & \\ \cline{2-6}
 & & 10x^3 & +x^2 & -7x & +1 & & & & \\
 & & -10x^3 & -5x^2 & +15x & & & & & \\ \cline{3-6}
 & & & -4x^2 & +8x & +1 & & & & \\
 & & & 4x^2 & +2x & -6 & & & & \\ \cline{4-6}
 & & & & 10x & -5 & & & &
\end{array}
$$

El cociente es: $3x^3 - x^2 + 5x - 2$

El resto es: $10x - 5$

Comprobación:

Notemos que $\text{grau}(10x - 5) < \text{grau}(2x^2 + x - 3)$

Podemos probar que $\left(2x^2 + x - 3\right) \cdot \left(3x^3 - x^2 + 5x - 2\right) + (10x - 5) = 6x^5 + x^4 + 4x^2 - 7x + 1$

Efectuemos la multiplicación:

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & & 3x^3 & -x^2 & +5x & -2 \\
 & & & 2x^2 & +x & -3 \\ \hline
 & & -9x^3 & +3x^2 & -15x & +6 \\
 & +3x^4 & -x^3 & +5x^2 & -2x & \\
6x^5 & -2x^4 & +10x^3 & -4x^2 & & \\ \hline
6x^5 & +x^4 & & +4x^2 & -17x & +6
\end{array}
$$

Efectuemos la suma:

$$
\begin{array}{rrrrrr}
6x^5 & +x^4 & & +4x^2 & -17x & +6 \\
 & & & & 10x & -5 \\ \hline
6x^5 & +x^4 & & +4x^2 & -7x & +1
\end{array}
$$

Ejercicio: Regla de Ruffini.

División de un polinomio P(x) entre un monomio de la forma $x - a$

Efectúa la siguiente división: $\left(-3x^5 + 4x^3 - 5x + 1\right) : (x - 2)$

1 En la primera fila colocamos los coeficientes del dividendo ordenados según las potencias decrecientes.

4 Los números de la segunda fila se consiguen multiplicando el término independiente del divisor por el último número conseguido de la tercera fila:
2·(–3)=–6 2·(–6)=–12
2·(–8)=–16 2·(–16)=–32
2·(–37)=–74

	-3	0	4	0	-5	1
2		-6	-12	-16	-32	-74
	-3	-6	-8	-16	-37	$\boxed{-73}$

2 Término independiente del divisor cambiado de signo

3 Coeficiente principal del dividendo

5 Suma de los números superiores.

6 Suma de los números superiores.
Es el resto de la división.

7 Los coeficientes del polinomio cociente són los números de la tercera fila menos el último que es el resto. En este caso los coeficientes son: (–3,–6,–8,–16,–37)

Por tanto el cociente es $-3x^4 - 6x^3 - 8x^2 - 16x - 37$

El resto es $R = -73$

Ejercicio 2:

Calcula el valor del polinomio $p(x) = 2x^4 - 3x^2 + 5x + 1$ en $x = 2$ por dos métodos distintos.

Solución:

Por la definición de valor de un polinomio:

$p(2) = 2 \cdot 2^4 - 3 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2 + 1 = 31$

Por el teorema del resto $p(2)$ es el resto de dividir $p(x)$ entre $x - 2$

Efectuemos la división utilizando la regla de Ruffini:

	2	0	–3	5	1
2		4	8	10	30
	2	4	5	15	$\boxed{31}$

El resto de la división es R=31, por tanto, $p(2) = 31$

Ejercicio 3:

Calcula el resto de la división $\left(x^5+7\right):(x+2)$ por dos métodos distintos:

Efectuando la división por la regla de Ruffini:

	1	0	0	0	0	7
-2		-2	4	-8	16	-32
	1	-2	4	-8	16	$\boxed{-25}$

El resto de la división es $R=-25$

Utilizando el teorema del resto, el resto de dividir $\left(x^5+7\right):(x+2)$ es $p(-2)$

Por tanto, $R=p(-2)=\left(-2\right)^5+7=-25$

Factorización de un polinomio aplicando el teorema del resto.

Si dividimos $p(x):(x-a)$ y la división es exacta:

$$\begin{array}{l|l} p(x) & x-a \\ \cline{2-2} 0 & q(x) \end{array}$$

Entonces, $p(x)=(x-a)\cdot q(x)$

Diremos que $x=a$ es una raíz o cero del polinomio $p(x)$

Teorema:

Siga $p(x)$ es un polinomio con coeficientes enteros y $x=a$ es un cero entero del polinomio $x=a$, entonces $x=a$ divide al término independiente del polinomio $p(x)$.

Ejercicio 4:

Factoriza el polinomio $p(x)=x^4+x^3-6x^2-4x+8$.

Solución:

Por el teorema anterior, si el polinomio tiene ceros enteros, estos son divisores del término independiente 8.

Los divisores enteros de 8 son $1,-1,2,-2,4,-4,8,-8$

$x=1$, es un cero ya que $p(1)=1^4+1^3-6\cdot 1^2-4\cdot 1+8=0$

Entonces podemos efectuar la división:

	1	1	-6	-4	8
1		1	2	-4	-8
	1	2	-4	-8	$\boxed{0}$

Por tanto,

$p(x)=x^4+x^3-6x^2-4x+8=(x-1)\cdot(x^3+2x^2-4x-8)$

Repetiremos el procedimiento con el polinomio cociente x^3+2x^2-4x-8

	1	2	-4	-8
2		2	8	8
	1	4	4	$\boxed{0}$
-2		-2	-4	
	1	2	$\boxed{0}$	
-2		-2		
	1	$\boxed{0}$		

Entonces,

$$x^3+2x^2-4x-8=(x-2)\cdot\left(x^2+4x+4\right)=$$
$$=(x-2)\cdot(x-(-2))\cdot(x-(-2))=$$
$$=(x-2)\cdot(x+2)^2$$

Por tanto,

$$p(x)=x^4+x^3-6x^2-4x+8=(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x+2)^2$$

Los ceros o raíces del polinomio $p(x)$ son $x=1,2,-2,-2$

Ejercicios propuestos.

1. Sean los polinomios $p(x)=2x^4+3x^2-5x+7$, $q(x)=-2x^2+4x-3$.
Calcula:

a) $p(x)+q(x)$ b) $p(x)-q(x)$ c) $p(x)\cdot q(x)$

d) $2\cdot p(x)$ e) $3\cdot p(x)+4\cdot q(x)$ f) $\left(p(x)\right)^2$

2. Efectúa las siguientes divisiones de monomios:

a) $\left(6x^5\right):\left(2x^3\right)$ b) $\left(-9x^3\right):\left(3x^2\right)$ c) $\left(4x^5\right):\left(-2x^5\right)$

d) $\left(4x^5\right):\left(5x^4\right)$ e) $\left(7x^7\right):\left(3x^4\right)$ f) $\left(5x^6\right):\left(-2x^3\right)$

g) $\left(-2x^6\right):\left(5x^2\right)$ h) $\left(-3x^4\right):\left(-2x\right)$ y) $\left(7x^4\right):\left(14x^3\right)$

3. Efectúa las siguientes divisiones de polinomios:

a) $\left(2x^5-4x^4+2x^3+x^2-5x+2\right):\left(x^3-2x^2+x-3\right)$

b) $\left(3x^4-3x^2+x-5\right):\left(x^2+3\right)$

c) $\left(-2x^3+4x^2+x\right):(2x+1)$

d) $\left(8x^5+1\right):\left(2x^3-1\right)$

e) $\left(x^3-3x^2+6x-1\right):\left(x^2-4x+5\right)$

f) $\left(3x^4-2x^3+4x-7\right):(x+3)$

g) $\left(4x^4-2x^2+3x-2\right):\left(2x^2+x-3\right)$

4. Efectúa las siguientes divisiones aplicando la regla de Ruffini.

a) $\left(2x^5-3x^4+4x^3-5x^2+3x+1\right):(x+2)$

b) $\left(-2x^4+3x^2-5\right):(x-3)$

c) $\left(x^5+4x^4-5x+1\right):(x+1)$

d) $\left(x^4-3x^3+4x^2+3x-5\right):(x-5)$

e) $\left(3x^5+2\right):(x-1)$

f) $\left(-3x^4+2x^3-7x\right):(x-2)$

g) $\left(x^5+4x^2\right):(x+3)$

h) $\left(2x^4+3x^3-5\right):(x+4)$

y) $\left(4x^4-2x+1\right):\left(x+\frac{1}{2}\right)$

j) $\left(x^3-4x^2+3x-1\right):\left(x-\frac{1}{3}\right)$

5. Sea el polinomio $p(x)=2x^3-4x^2+2x-5$, por la definición, calcula los siguientes valores:

a) $p(1)$ b) $p(-1)$ c) $p(2)$

d) $p(-3)$ e) $p(4)$ f) $p\left(\frac{1}{2}\right)$

6. Sea el polinomio $p(x)=2x^3-4x^2+2x-5$, utilizando el teorema del resto, calcula los siguientes valores:

a) $p(1)$ b) $p(-1)$ c) $p(2)$

d) $p(-3)$ e) $p(4)$ f) $p\left(\frac{1}{2}\right)$

7. Determina el valor m para que la división $\left(2x^3-4x^2+x+m\right):(x+2)$ siga exacta. (El ejercicio se puede resolver por dos métodos distintos).

8. Determina el valor m para que la división $\left(x^3+mx+3\right):(x-2)$ sea exacta.

9. Determina m para que la división $\left(x^4+2x^3-3x^2+4x+m\right):(x+1)$ tenga por resto 3.

10. Determina m para que la división $\left(x^3+mx^2+2x+3\right):(x-1)$ tenga por resto –7.

11. Determina m sabiendo que $x=-2$ es una raíz del polinomio $p(x)=x^3+2x^2-3x+m$. (El ejercicio se puede resolver por dos métodos distintos).

12. Determina m sabiendo que $x=3$ es una raíz del polinomio $p(x)=x^4-3x^3+mx+1$

13. Factoriza los siguientes polinomios. En cada ejercicio determina los ceros o raíces.

a) $x^4+3x^3-3x^2-11x-6$
b) $x^4+6x^3+9x^2-4x-12$
c) $x^4+x^3-19x^2-49x-30$
d) $x^4+10x^3+37x^2+60x+36$
e) x^4-2x^2+1
f) $x^4+3x^3-5x^2-3x+4$
g) $x^4+2x^3-12x^2+14x-5$
h) $x^5+6x^4+5x^3-24x^2-36x$
y) $x^5+2x^4-3x^3-8x^2-4x$
j) $x^6+2x^5-3x^4-4x^3+4x^2$