Inecuaciones

Desigualdades

Diremos que $a < b$ “a es menor que b” si $b - a$ es un número positivo.
Gráficamente, a queda a l’esquerra de b.

Diremos que $a > b$ “a mayor que b” si $a - b$ es un número positivo.
Gráficamente, a queda a la derecha de b.

Diremos que $a \le b$ “a es menor o igual que b” si $a < b$, o bien, $a = b$.

Diremos que $a \ge b$ “a es mayor o igual que b” si $a > b$, o bien, $a = b$.

Ejemplos:

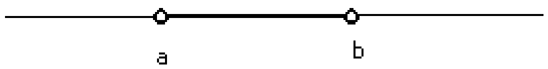
$-5 < 7$ $\quad$ $-3 > -10$ $\quad$ $-2 \le 3$ $\quad$ $\frac{-1}{3} \ge \frac{-1}{2}$

Propiedades de les desigualdades.

Propiedad 1:	Propiedad 2:	Propiedad 3:
Si $a < b$, entonces, $a + c < b + c$.	$\begin{matrix} a < b \\ c > 0 \end{matrix}$, entonces, $a \cdot c < b \cdot c$	$\begin{matrix} a < b \\ c < 0 \end{matrix}$, entonces, $a \cdot c > b \cdot c$

Intervalos

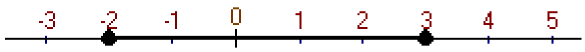
Siga $a < b$
Definimos intervalo abierto de extremos a, b y lo representamos por $]a, b[$ al conjunto:
$]a, b[= \{x \in R \ / \ a < x < b\}$ es decir, todos los números reales que son mayores que a y menores que b.



Ejemplo: Intervalo abierto $]-2, 3[$

Definimos intervalo cerrado de extremos a, b y lo representamos por $[a, b]$ al conjunto:
$[a, b] = \{x \in R \ / \ a \le x \le b\}$ es a decir, todos los números reales que son mayores o igual que a y menores o igual que b.

Ejemplo: El intervalo cerrado $[-2, 3]$



Definimos intervalo abierto de extremos a, $+\infty$ y lo representaremos $]a,+\infty[$ al conjunto:
$]a,+\infty[= \{x \in R \ / \ x > a\}$, es decir, los números reales mayores que a.

Definimos intervalo cerrado de extremos a, $+\infty$ y lo representaremos $[a,+\infty[$ al conjunto:
$[a,+\infty[= \{x \in R \ / \ x \geq a\}$, es decir, los números reales mayores o igual que a.

Definimos intervalo abierto de extremos $-\infty$, a y lo representamos $]-\infty,a[$ al conjunto:
$]-\infty,a[= \{x \in R \ / \ x < a\}$, es decir, los números reales menores que a.

Definimos intervalo cerrado de extremos $-\infty$, a y lo representamos $]-\infty,a] =$ al conjunto:
$]-\infty,a] = \{x \in R \ / \ x \leq a\}$, es decir, los números reales menores o igual que a.

Inecuaciones de primer grado con una incógnita.

Una inecuación es una desigualdad algebraica en la que aparecen letras (incógnitas) de valor desconocido.
Si sólo hay una incógnita y es de grado 1 la inecuación es de primer grado con una incógnita.

Procedimiento para resolver una inecuación de primer grado con una incógnita.

- Quitar denominadores, multiplicando ambas partes de la inecuación por el mínimo común múltiplo de los denominadores (propiedad 2 o 3).
- Quitar paréntesis. (propiedad distributiva).
- Transposición de términos, para conseguir una inecuación de una de las formas siguientes:
  $a \cdot x < b$, $a \cdot x \leq b$, $a \cdot x > b$, o bien $a \cdot x \geq b$ (propiedad 1)
- Despejar la incógnita. (Propiedad 2 o 3)
- Determinar la expresión analítica, por intervalos y gráfica de la solución.

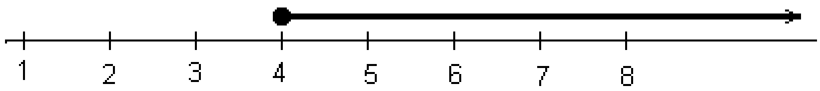
Ejercicios de autoaprendizaje:
a) Resuelve la inecuación
$2(x-3) \leq 4x + 2$
Quitamos el paréntesis efectuando operaciones:
$2x - 6 \leq 4x + 2$
Transponemos los términos de la inecuación (propiedad 1):
$2x - 4x \leq 2 + 6$
$-2x \leq 8$
Despejamos la incógnita. Notamos que el coeficiente de la incógnita es negativo, por tanto aplicaremos la propiedad 3. La desigualdad cambia de sentido:

$x \geq \frac{8}{-2}$

Entonces:

$x \geq -4$ es la solución analítica.

$[-4,+\infty[$ es la solución por intervalos.



es la solución gráfica

b) Resuelve la inecuación

$2x + 3 > 2(x + 3)$

Quitamos el paréntesis efectuando operaciones:

$2x + 3 > 2x + 6$

Transponemos los términos de la inecuación:

$2x - 2x > 6 - 3$

$0 > 3$

Esta desigualdad es falsa por tanto la inecuación no tiene solución.

Nota: si la desigualdad fuera verdadera cualquier número real sería solución de la inecuación.

c) Resuelve la inecuación

$\frac{5x-3}{6} + \frac{x-5}{18} < \frac{x+1}{3}$

Quitamos los denominadores multiplicando ambas partes de la inecuación por el mínimo común múltiplo de los denominadores $mcm(3, 6, 18) = 18$

$18\left(\frac{5x-3}{6} + \frac{x-5}{18}\right) < 18\left(\frac{x+1}{3}\right)$

$3(5x - 3) + x - 5 < 6(x + 1)$

Quitamos los paréntesis:

$15x - 9 + x - 5 < 6x + 6$

Transponemos los términos:

$15x + x - 6x < 6 + 9 + 5$

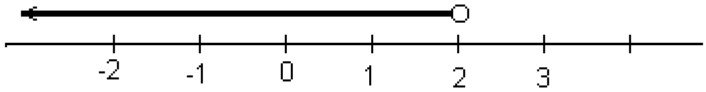
$10x < 20$

Despejamos la incógnita. Notamos que el coeficiente de la incógnita es positivo. (propiedad 2)

$x < \frac{20}{10}$

$x < 2$ es la solución analítica.

$]-\infty, 2[$ es la solución por intervalos.



Es la solución gráfica.

Inecuaciones de grado mayor que 1 con una incógnita.

Método de resolución:.

1. Desigualar la inecuación a cero.
2. Calcular los ceros o raíces del polinomio.
3. Representar los ceros en la recta real.
4. Calcular el signo del valor del polinomio en cada intervalo que determinan los ceros.
5. Resolver la inecuación.

Ejercicios de autoaprendizaje:

1. Resuelve la inecuación:

$(x+2)^2 \leq x+8$

Efectuemos operaciones:

$x^2 + 4x + 4 \leq x + 8$

Desigualamos a cero la inecuación:

$x^2 + 3x - 4 \leq 0$

Calculamos los ceros del polinomio $x^2 + 3x - 4$

$x^2 + 3x - 4 = 0$ utilizando la fórmula de la ecuación de segundo grado $x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \begin{cases} 1 \\ -4 \end{cases}$

Representamos los ceros en la recta real:

Los ceros han dividido la recta real en tres intervalos: $]-\infty,-4[$, $]-4,1[$, $]1,+\infty[$

Estudiemos el signe del valor del polinomio $x^2 + 3x - 4$ en cada intervalo:

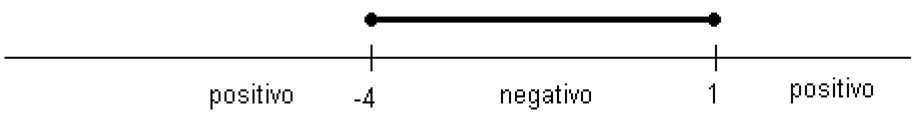
$x = -5$ pertenece al primer intervalo, $(-5)^2 + 3\cdot(-5) - 4 = 6 > 0$

$x = 0$ pertenece al segundo intervalo, $0^2 + 3\cdot 0 - 4 = -4 < 0$

$x = 2$ pertenece al tercer intervalo, $2^2 + 3\cdot 2 - 4 = 6 > 0$

$x = -4$ es solución de la inecuación ya que es cero del polinomio, $(-4)^2 + 3\cdot(-4) - 4 = 0$

Entonces:



La solución es el intervalo $[-4,1]$, es decir, $-4 \leq x \leq 1$

2. Resuelve la inecuación: $x^5 + 6x^4 + 9x^3 > 4x^2 + 12x$

Desigualamos la inecuación a cero:

$x^5 + 6x^4 + 9x^3 - 4x^2 - 12x > 0$

Utilizando la Regla de Ruffini y el teorema del resto factorizamos el polinomio

$x^5 + 6x^4 + 9x^3 - 4x^2 - 12x$

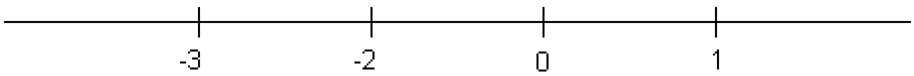
$x^5 + 6x^4 + 9x^3 - 4x^2 - 12x = x(x^4 + 6x^3 + 9x^2 - 4x - 12)$

	1	6	9	-4	-12
1		1	7	16	12
	1	7	16	12	$\boxed{0}$
-2		-2	-10	-12	
	1	5	6	$\boxed{0}$	
-2		-2	-6		
	1	3	$\boxed{0}$		
-3		-3			
	1	$\boxed{0}$			

Por tanto, $x^5+6x^4+9x^3-4x^2-12x = x(x-1)(x+2)^2(x+3)$

Los ceros del polinomio son: $x=0,\ x=1,\ x=-2,\ x=-2,\ x=-3$.

Representamos los ceros en la recta real:



Los ceros determinan 5 intervalos: $]-\infty,-3[,\quad]-3,-2[,\quad]-2,0[,\quad]0,1[,\quad]1,+\infty[$

Estudiemos el signo del valor del polinomio $x(x-1)(x+2)^2(x+3)$ en cada intervalo:

$x=-4$ pertenece al primer intervalo, $(-4)\cdot(-5)\cdot(-2)^2\cdot(-1)<0$

$x=-2'5$ pertenece al segundo intervalo, $(-2'5)\cdot(-3'5)\cdot(-0'5)^2\cdot 0'5>0$

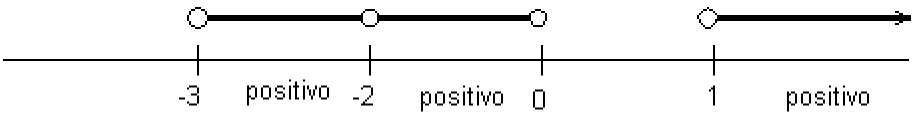
$x=-1$ pertenece al tercer intervalo, $(-1)\cdot(-2)\cdot 1^2\cdot 2>0$

$x=0'5$ pertenece al cuarto intervalo, $0'5\cdot(-0'5)\cdot(2'5)^2\cdot 3'5<0$

$x=2$ pertenece al quinto intervalo, $2\cdot 1\cdot 4^2\cdot 5>0$

Los ceros del polinomio no son soluciones de la inecuación:

Por tanto:



La solución es $]-3,-2[\ \cup\ ]-2,0[\ \cup\ ]1,+\infty[$

Es decir, $-3<x<-2 \quad \vee \quad -2<x<0 \quad \vee \quad x>1$

Inecuaciones racionales:

Una inecuación es racional si tiene fracciones con incógnitas en el denominador:

Método de resolución:

1. Desigualar la inecuación a cero.
2. Efectuar operaciones para que quede una fracción algebraica desigualada a cero.
3. Calcular los ceros o raíces del numerador y denominador de la fracción del apartado 2.
4. Representar los ceros anteriores en la recta real.
5. Calcular el signo del valor del polinomio en cada intervalo que determinen los ceros.
6. Resolver la inecuación. (Tenemos que notar que no tiene solución cuando el denominador de la fracción es cero)

Ejercicio de autoaprendizaje:

Resuelve la inecuación: $\frac{x+3}{x-2} \geq 2$

Desigualamos a cero:

$\frac{x+3}{x-2} - 2 \geq 0$

Efectuamos las operaciones en la primera parte de la desigualdad:

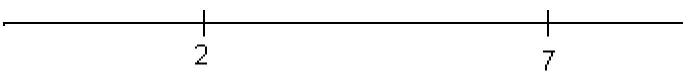
$\frac{x+3-2(x-2)}{x-2} \geq 0$ $\quad$ $\frac{x+3-2x+4}{x-2} \geq 0$ $\quad$ $\frac{-x+7}{x-2} \geq 0$

Calculamos los ceros del numerador y del denominador:

$-x+7=0$, entonces, $x=7$

$x-2=0$, entonces, $x=2$

Representamos los ceros en la recta real.



Determinen 3 intervalos: $]-\infty, 2[$, $]2, 7[$ y $]7, +\infty[$

$x=0$ pertenece al primer intervalo el valor de la fracción es $\frac{-0+7}{0-2} < 0$.

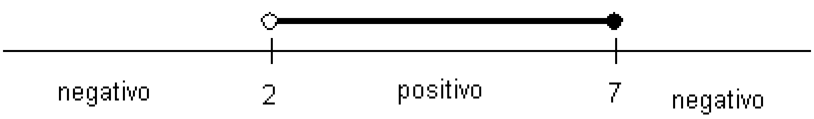
$x=3$ pertenece al segundo intervalo el valor de la fracción es $\frac{-3+7}{3-2} > 0$.

$x=8$ pertenece al tercer intervalo el valor de la fracción es $\frac{-8+7}{8-2} < 0$

$x=2$ no es solución de la inecuación porque anula el denominador.

$x=7$ es solución de la inecuación porque sólo anula el numerador $\frac{-7+7}{7-2} = 0$

Entonces:



La solución es el intervalo $]2, 7]$, es decir, $2 < x \leq 7$

Sistemas de inecuaciones con 1 incógnita:

Un sistema de inecuaciones son dos o más inecuaciones la solución del cual es la intersección de las soluciones de todas las inecuaciones

Método de resolución:
Resolveremos separadamente cada una de las inecuaciones.
Determinaremos la intersección de las soluciones. (Valores que satisfacen todas las inecuaciones).
Nota: Si no hay intersección la inecuación no tiene solución.

Ejercicio de autoaprendizaje

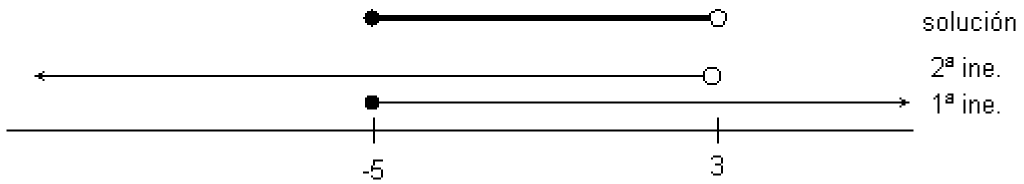
Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} 3x + 4 \geq x - 6 \\ 2x > 5x - 6 \end{cases}$$

Resolvemos las dos inecuaciones:

$$\begin{cases} 2x \geq -10 \\ -3x > -6 \end{cases} \quad \text{Despejamos las incógnitas,} \quad \begin{cases} x \geq -5 \\ x < 3 \end{cases}$$

Representamos gráficamente las soluciones:



Notamos que $x = -5$ es solución de ambas inecuaciones. $x = 3$ no es solución porque sólo es solución de la primera inecuación.

Ejercicios propuestos:

1. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $5x - 1 < 7x + 9$
b) $12x + 7 \geq 3x - 2$
c) $6 - 8x + 3 \leq -9x + 7 - x$
d) $-x - 1 + 2x > 9 - 7x + 5$
e) $x - (7x - 3) < 7 - 4x - 5$
f) $2x \leq 2(x - 1)$
g) $3x + 4 \geq 3(x - 7)$
h) $x - 2(1 - x) > 7$
i) $2x + 3(1 - 2x) < x + 8$
j) $x - \frac{x}{5} \geq 30$
k) $\frac{x}{2} + \frac{x}{6} < 7 + x$
l) $\frac{x}{5} - \frac{2x}{15} \geq \frac{x + 4}{3}$
m) $\frac{4x + 1}{3} \leq \frac{12x - 3}{7}$
n) $\frac{2x - 5}{12} > \frac{-x}{4} - \frac{5}{3}$
o) $\frac{x}{5} + \frac{x}{3} - 1 < \frac{x}{2}$
p) $\frac{2x + 4}{3} \geq \frac{x}{6} - 3$
q) $\frac{4x - 3}{5} - \frac{4x}{3} < \frac{2(x - 13)}{15}$
r) $\frac{4x}{15} - \frac{6x + 28}{3} \leq 0$
s) $\frac{5x + 1}{6} > 2 - \frac{2x + 1}{3}$

t) $\frac{x-2}{7}-\frac{x+3}{3}\leq\frac{5x}{21}$

2. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $x^2-12x>0$

b) $2x^2-288\leq 0$

c) $x^2-2x-8\geq 0$

d) $7x^2-20x-3\leq 0$

e) $x(x-1)+x(x-3)<48$

f) $(x-1)^2-(x+3)^2-x^2>7$

g) $4x^2-x>-2$

h) $x^2-10x\leq -25$

i) $3x^2>-343$

j) $3x^2\leq -343$

k) $7x^2+26>x^2+80$

l) $3(x+1)-x(2x-1)\leq 4x-1$

m) $x^2-50-6x>9x$

n) $5x^2<6x+1$

o) $(x-1)^2\geq 25$

p) $3(x-1)(x+2)\leq 6x$

3. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $x^4+3x^3-3x^2\leq 11x+6$

b) $x^4+6x^3>-9x^2+4x+12$

c) $x^4+x^3-19x^2\geq +49x+30$

d) $x^4+10x^3+37x^2<-60x-36$

e) $x^4-2x^2>-1$

f) $x^4+3x^3-5x^2-3x+4\leq 0$

g) $x^4+2x^3-12x^2+14x-5>0$

h) $x^5+6x^4+5x^3\geq +24x^2+36x$

i) $x^5+2x^4-3x^3-8x^2-4x<0$

j) $x^6+2x^5-3x^4-4x^3+4x^2>0$

4. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $\frac{x-4}{x+3}>0$

b) $\frac{2x-10}{x+3}\leq 0$

c) $\frac{x+6}{3-x}<0$

d) $\frac{3x-6}{4-x}\geq 0$

e) $\frac{x-3}{x+5}<1$

f) $\frac{x+1}{1-x}\geq 1$

g) $\frac{3}{2x-4}<4$

h) $\frac{3-2x}{x}\leq\frac{-5}{3}$

i) $\frac{5x-4}{x+3}-2\geq\frac{2x}{x+3}$

j) $\frac{x}{4-2x}>\frac{3}{4-2x}$

5. Resuelve los siguientes sistemas d'inecuaciones:

a) $\begin{cases}5x-4\geq 2x+2\\3x-8\leq x+6\end{cases}$

b) $\begin{cases}9x+x<8\\1+3x>2x+4\end{cases}$

c) $\begin{cases}4x+5<7x-2\\x-1<3x-6\end{cases}$

d) $\begin{cases}3x+2\geq x-4\\5-x>-2\end{cases}$

e) $\begin{cases}3x-15\leq x-5\\-x+12\geq 6\end{cases}$

f) $\begin{cases}2x-10>-x+2\\12-4x<-3x+2\end{cases}$