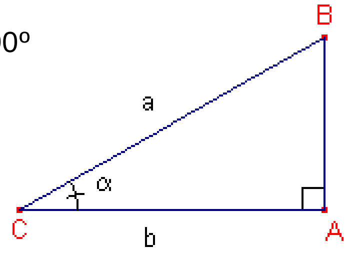
Trigonometría
Resolución de triángulos.

Razones trigonométricas de un ángulo agudo.

Consideraremos el triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ tal que $A = 90º$



Recordemos que en triángulo rectángulo cualquiera se cumplía el teorema de Pitágoras:
$a^2 = b^2 + c^2$

Definimos seno del ángulo α y lo representamos por sen α

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{CB}} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

Definimos coseno del ángulo α y lo representamos por cos α

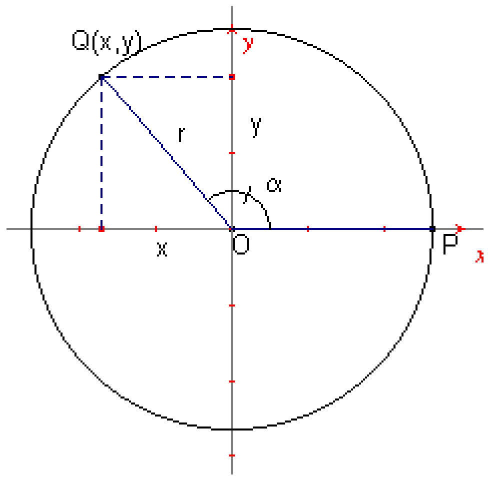
$$\cos\alpha = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}}$$

Definimos tangente del ángulo α y lo representamos por tg α

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{CA}} = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}}$$

Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera.

Sea el punto Q(x,y)
Consideramos la circunferencia de centro O que pasa por el punto Q y tiene radio r.
Consideramos el ángulo $\alpha = \angle POQ$
Definimos:



$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{y}{r}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$$

Relaciones fundamentales entre las razones trigonométricas.
Dado un ángulo α se cumplen las siguientes relaciones:

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

Estas dos identidades se llaman relaciones fundamentales de la trigonometría.

Uso de la calculadora:

Modos angulares de la calculadora:
MODE DEG medidas sexagesimales
MODE GRA medidas centesimales
MODE RAD medidas en radianes

Conociendo el ángulo α se pueden calcular las razones trigonométricas con las teclas sin cos tan
Ejemplo:
Calcula $\operatorname{tg}43º25'50''$, sen50º30',
Con calculadoras antiguas:

43	º ' "	25	º ' "	50	º ' "	tan	=	0.9467

50	º ' "	30	º ' "	sin	=	0.7716

Con calculadoras nuevas

tan	43	º ' "	25	º ' "	50	º ' "	=	0.9467

sen	50	º ' "	30	º ' "	=	0.7716

Conociendo las razones trigonométricas del ángulo α podemos calcular el ángulo α con las teclas $\sin^{-1}$ $\cos^{-1}$ $\tan^{-1}$
Ejemplo:
Calcula el ángulo α tal que $\operatorname{sen}\alpha = 0.34$. $\alpha = \arcsin(0.34)$
Con calculadoras antiguas:

0.34	$\sin^{-1}$	SHIFT	º ' "	19º52'37"

Con calculadoras nuevas:

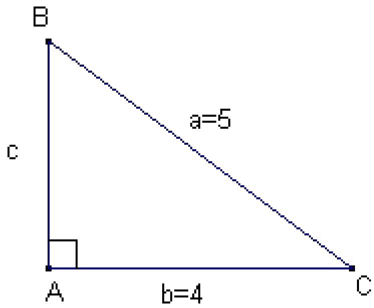
$\sin^{-1}$	0.34	=	SHIFT	º ' "	19º52'37"

Resolución de triángulos rectángulos.

Resolver un triángulo es determinar los tres lados y los tres ángulos.

Con la ayuda del teorema de Pitágoras, de las razones trigonométricas, y de la calculadora se puede resolver cualquier triángulo rectángulo. Veamos los siguientes ejercicios:

Problema 1:



Del triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ tal que $A = 90º$ conocemos
$a = 5cm, b = 4cm$

Determina todos los lados, los ángulos y el área del triángulo.

Aplicando el teorema de Pitágoras:

$a^2 = b^2 + c^2$

$5^2 = 4^2 + c^2$, $25 = 16 + c^2$, $c^2 = 9$

Entonces $c = 3$.

Aplicando cualquier razón trigonométrica podemos calcular el ángulo C.

$\cos C = \frac{b}{a}$, $\cos C = \frac{4}{5} = 0'8$

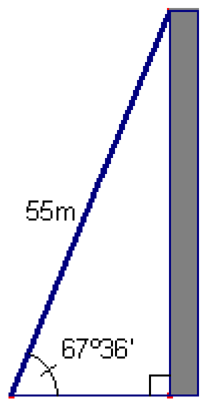
Con la ayuda de la calculadora $C = \arccos 0.8 = 36º52'12''$

Sabiendo que los tres ángulos de un triángulo suman 180º $(A + B + C = 180º)$

Tenemos que $B + C = 90º$, entonces $B = 90º – C = 90º – 36º52'12'' = 53º7'48''$

Por ser el triángulo rectángulo, el área es $S = \frac{b \cdot c}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6cm^2$

Problema 2:



Para subir al Miquelet de Valencia utilizamos una escalera exterior de 55m, que forma con la horizontal un ángulo de 67º36'.
Con estos datos calcula la altura del Miquelet.

Notemos que la horizontal, y el Miquelet forman un ángulo recto.
Sea x la altura del Miquelet,
Utilizando la razón trigonométrica seno,

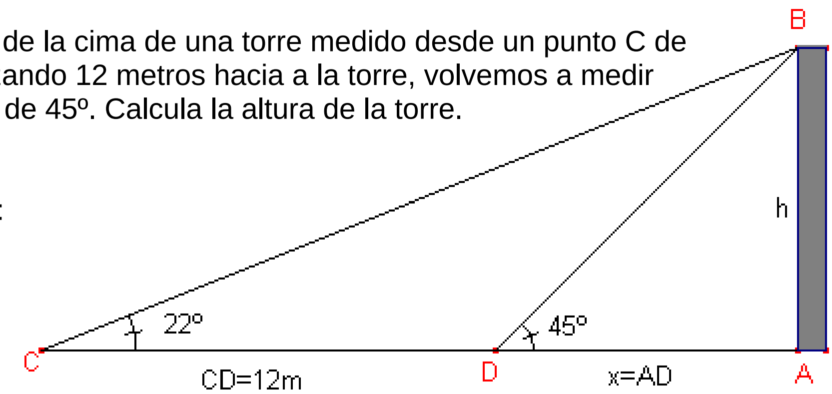
$\text{sen} 67º36' = \frac{x}{55}$

Entonces, $x = 55 \cdot \text{sen} 67º36' = 50'85m$

Problema 3:

El ángulo de elevación de la cima de una torre medido desde un punto C de La horizontal es de 22º. Avanzando 12 metros hacia a la torre, volvemos a medir El ángulo de elevación que es de 45º. Calcula la altura de la torre.

Solución:
Dibujamos el gráfico siguiente:



Sea $x = \overline{AD}$, sea $h = \overline{AB}$

Sea el triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ $\quad tg22^o = \dfrac{h}{12+x}$

Sea el triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ABD}$ $\quad tg45^o = \dfrac{h}{x}$

Con la ayuda de la calculadora $tg22^o = 0'4040, \quad tg45^o = 1$

Consideramos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} h = (12+x)tg22^o \\ h = x \cdot tg45^o \end{cases} \text{ substituyendo } \begin{cases} h = (12+x)\cdot 0'4040 \\ h = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} h = x \\ x = (12+x)\cdot 0'4040 \end{cases}$$

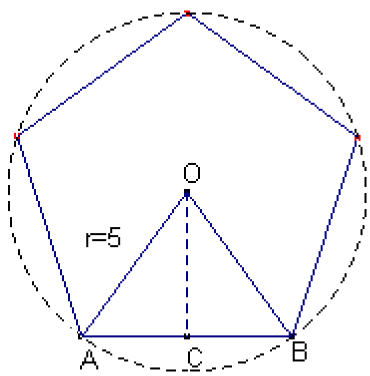
$$\begin{cases} h = x \\ x = 4.8480 + 0'4040x \end{cases}$$

$$\begin{cases} h = 8'1342m \\ x = 8'1342m \end{cases}$$

Entonces la altura de la torre es 8’1342m

Problema 4:
Calcula el lado y la apotema de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de radio 5cm.

Solución:

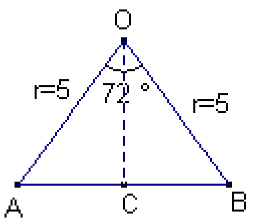


Sea $r = \overline{OA} = 5$ el radio de la circunferencia circunscrita al pentágono regular.

Sea el lado del pentágono $x = \overline{AB}$

Sea la apotema del pentágono $y = \overline{OC}$

El ángulo $\angle AOB = \dfrac{360^o}{5} = 72^o$

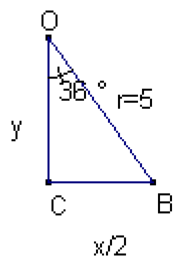


Consideramos el triángulo isósceles $\overset{\Delta}{ABO}$

La altura del triángulo divide al triángulo $\overset{\Delta}{ABO}$ en dos triángulos rectángulos iguales.

Consideramos el triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{CBO}$

El ángulo $\angle COB = \dfrac{72^o}{2} = 36^o$



Sean, $\quad \overline{CB} = \dfrac{\overline{AB}}{2} = \dfrac{x}{2} \qquad \overline{OC} = y$

Aplicando las razones trigonométricas:

$$sen36^o = \frac{\overline{CB}}{\overline{\overline{OB}}} = \frac{\frac{x}{2}}{5} \qquad sen36^o = \frac{x}{10}$$

Haciendo uso de la calculadora:

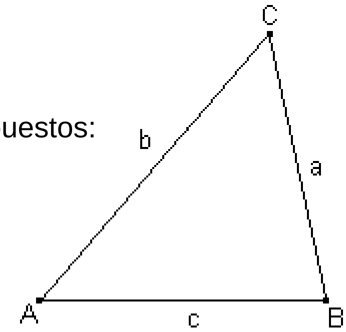
$0'5878 = \frac{x}{10}$, entonces el lado del pentágono mide $x = 5'878cm$

$\cos 36º = \frac{\overline{OC}}{\overline{OB}} = \frac{y}{5}$

Usando la calculadora:

$0'8090 = \frac{y}{5}$, entonces la apotema del pentágono mide $y = 4'045cm$

Teorema de los senos



Los lados de un triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos:

$$\frac{a}{\text{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\hat{B}} = \frac{c}{\text{sen}\hat{C}}$$

Teorema del coseno.

Sea el triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$. Se cumplen las siguientes igualdades.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$$

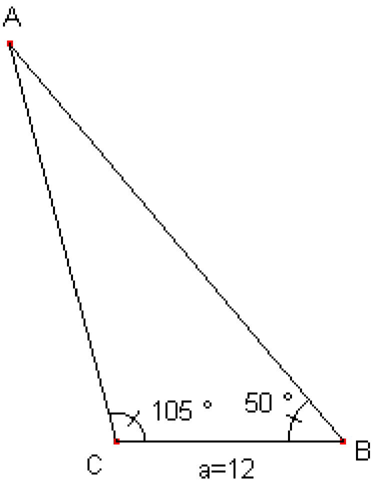
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \hat{B}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \hat{C}$$

Cálculo del área de un triángulo.

$$S = \frac{b \cdot c \cdot \text{sen}\hat{A}}{2} \qquad S = \frac{a \cdot c \cdot \text{sen}\hat{B}}{2} \qquad S = \frac{a \cdot b \cdot \text{sen}\hat{C}}{2}$$

Para resolver los triángulos, es de gran ayuda tener nociones de dibujo.
Casi todos los problemas se pueden dibujar con regla, escuadra, compás y transportador de ángulos.



Problema 5:

Resuelve el triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$, conocidos

$a = 12$, $\hat{B} = 45º$, $\hat{C} = 105º$

Solución:

Las incógnitas son b, c, $\hat{A}$

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180º$

$\hat{A} = 180º – \left(\hat{B} + \hat{C}\right) = 180º – (4º + 105º) = 30º$

A partir del teorema de los senos:

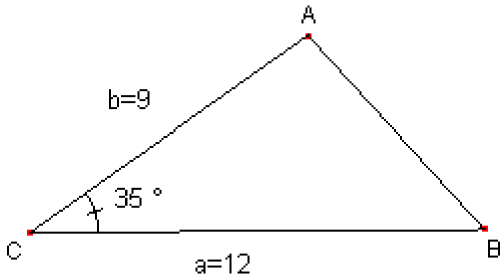
$$\frac{a}{sen\hat{A}}=\frac{b}{sen\hat{B}}=\frac{c}{sen\hat{C}}$$

$$\frac{12}{sen25^o}=\frac{b}{sen50^o} \quad \Rightarrow \quad b=12\cdot\frac{sen50^o}{sen25^o}\approx 21'75$$

$$\frac{12}{sen25^o}=\frac{c}{sen105^o} \quad \Rightarrow \quad c=12\cdot\frac{sen105^o}{sen25^o}\approx 27'43$$

Problema 6:

Resuelve el triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$, conocidos $a=12,\ b=9,\ \hat{C}=35^o$



Solución:

Las incógnitas son $c,\ \hat{A},\ \hat{B}$

A partir del teorema del coseno:

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cdot\cos\hat{C}$$

$$c^2=12^2+9^2-2\cdot 12\cdot 9\cdot\cos 35^o$$

$$c^2=225-176'94 \quad \Rightarrow \quad c^2=48'06 \quad \Rightarrow \quad c=\sqrt{48'06}\approx 6'93$$

Para calcular los ángulos $\hat{A},\ \hat{B}$ aplicaremos el teorema del coseno.

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\hat{A} \quad \Rightarrow \quad \cos\hat{A}=\frac{a^2-(b^2+c^2)}{-2bc}$$

$$\cos\hat{A}=\frac{12^2-\left(9^2+48'06\right)}{-2\cdot 9\cdot 6'93}=-0'1198$$

Usando de la calculadora:

$$\hat{A}=\arccos(-0'1198)\approx 96^o53'$$

$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^o$, por tanto,

$$\hat{B}=180^o-(\hat{A}+\hat{C})=180^o-(35^o+96^o53')\approx 48^o7'$$

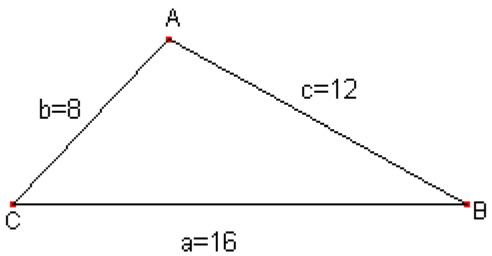
Problema 7:

Resuelve el triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$, conocidos $a=16,\ b=8,\ c=12$

Solución:

Las incógnitas son $\hat{A},\ \hat{B},\ \hat{C}$

Podemos observar que el problema tiene solución, porque,



$a+b>c$

$a+c>b$

$b+c>a$

Aplicando el teorema del coseno:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\hat{A} \quad \Rightarrow \quad \cos\hat{A}=\frac{a^2-(b^2+c^2)}{-2bc}$$

$$\cos\hat{A}=\frac{16^2-(8^2+12^2)}{-2\cdot 8\cdot 12} \quad \Rightarrow \quad \cos\hat{A}=\frac{-1}{4}$$

Con la ayuda de la calculadora $A = \arccos\left(\frac{-1}{4}\right) \approx 104º29'$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\hat{B} \quad \Rightarrow \quad \cos\hat{B} = \frac{b^2 - (a^2 + c^2)}{-2ac}$

$\cos\hat{B} = \frac{7}{8}$ Con la ayuda de la calculadora $\hat{B} = \arccos\left(\frac{7}{8}\right) \approx 28º57'$

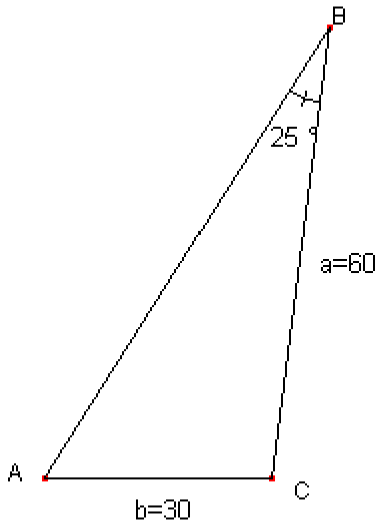
$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180º$, por tanto,

$\hat{C} = 180º - (\hat{A} + \hat{B}) = 180º - (104º29' + 28º57') \approx 46º34'$

Problema 8:

Resuelve el triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$, conocidos

$a = 60,\ b = 30,\ \hat{B} = 25º$



Solución:

Las incógnitas son $c,\ \hat{A},\ \hat{C}$

Aplicando el teorema de los senos,

$\frac{a}{\text{sen}\hat{A}} = \frac{b}{\text{sen}\hat{B}} \quad \Rightarrow \quad \frac{60}{\text{sen}\hat{A}} = \frac{30}{\text{sen}25º}$

$\text{sen}\hat{A} = \frac{60 \cdot \text{sen}25º}{30} = 0'84524$

Con la ayuda de la calculadora:

$A = \text{arcsen}(0.84524) \approx \begin{cases} 57º42' \\ 122º18' \end{cases}$

El problema tiene dos soluciones:

Primera solución:

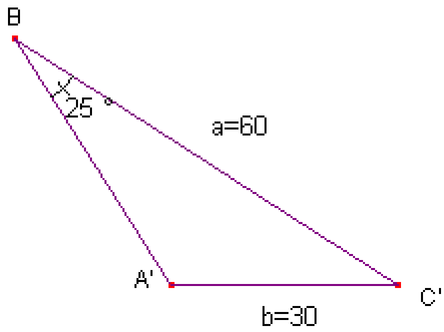
Si $\hat{A} \approx 57º42'$

$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180º$, por tanto,

$\hat{C} = 180º - (\hat{A} + \hat{B}) \approx 97º18'$

Por el teorema de los senos:

$c = a \cdot \frac{\text{sen}\hat{C}}{\text{sen}\hat{A}} = \frac{60 \cdot \text{sen}97º18'}{\text{sen}57º42'} \approx 70'41$



Segunda solución:

Si $\hat{A} \approx 122º18'$

$\hat{C} = 180º - (\hat{A} + \hat{B}) \approx 32º42'$

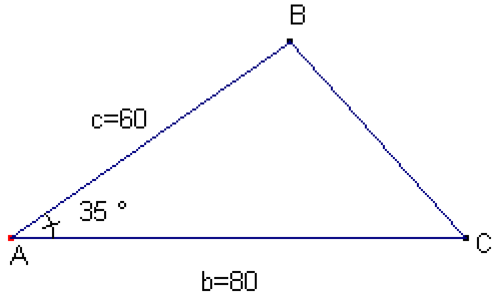
Por el teorema de los senos:

$c = a \cdot \frac{\text{sen}\hat{C}}{\text{sen}\hat{A}} a = \frac{60 \cdot \text{sen}32º42'}{\text{sen}57º42'} \approx 38'35$

Problema 9:

Calcula el área del triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ conocidos $b = 80cm, c = 60cm, \hat{A} = 35º$

Solución:



El área del triángulo es

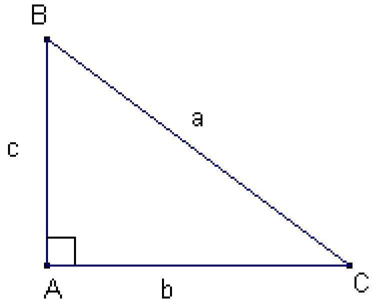
$S = \dfrac{b \cdot c \cdot sen\hat{A}}{2}$, por tanto,

$$S = \frac{bc \cdot sen\hat{A}}{2} = \frac{80 \cdot 60 \cdot sen35º}{2} \approx 1375'58cm^2$$

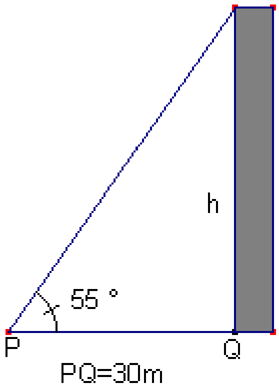
Problemas propuestos de triangulos

1 Resuelve los triángulos rectángulos $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 90º$ conocidos:

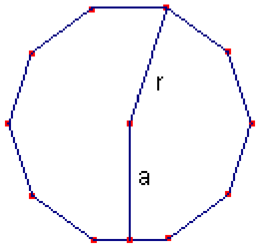
a) $a = 100cm, b = 7cm$
b) $b = 25m, c = 35m$
c) $a = 10cm, B = 40º35'$
d) $b = 75m, B = 55º$
e) $b = 10cm, C = 32º30'$
f) $c = 10cm, senC = \dfrac{1}{5}$
g) $b = 10m, tg\,C = 5$



2 Calcula la altura de la torre.

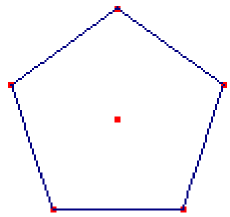


3 Calcula el área y la apotema de un decágono regular de lado 20cm.



4 Calcula el perímetro y el área de un decágono regular de apotema 10cm.

5 Calcula el lado y el área de un decágono regular inscrito en una circunferencia de radio 10cm



6 Calcula el área y la apotema de un pentágono regular de perímetro 100cm.

7 Calcula los ángulos y el lado de un rombo de diagonales 60cm, 80cm.

8 Calcula el área y el perímetro de un dodecágono regular inscrito en una circunferencia de 10cm de radio.

9 El área de un triángulo rectángulo es $6m^2$ y la hipotenusa mesura 5m. Calcula los ángulos y los catetos del triángulo rectángulo.

10 Calcula la altura de una torre, sabiendo que el ángulo de elevación desde un punto A y la horizontal es de 45º, que desde un punto B a 25m del punto A y más cerca de la torre el ángulo de elevación es de 60º.

11 Resuelve:

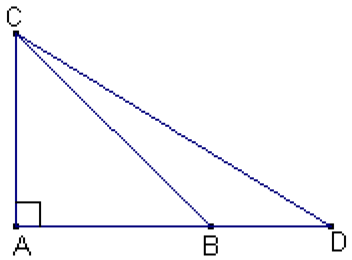
a)

Datos conocidos:

$\overline{BD} = 10cm, \angle ABC = 60º, \angle ADC = 45º$

Incógnitas:

$\overline{AC}, \overline{BC}, \angle BCD$



b)

Datos conocidos:

$\overline{CD} = 10cm, \overline{AB} = 4cm, \angle ADC = 25º$

Incógnitas:

$\overline{BC}, \overline{BD}, \angle BCD$

c)

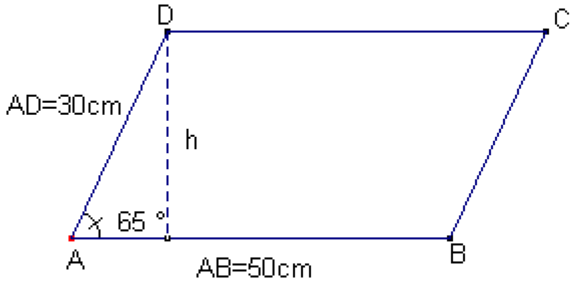
Datos conocidos:

$BC = 20cm, \angle ACB = 30º, \angle BCD = 25º$

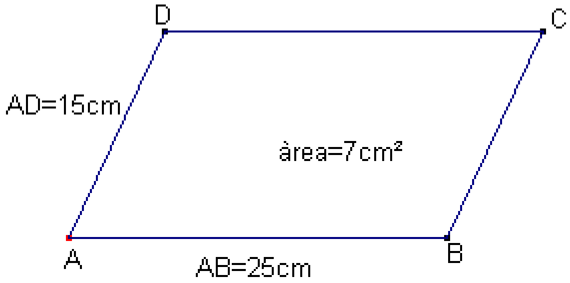
Incógnitas:

$\overline{AC}, \overline{CD}, \angle BDC$

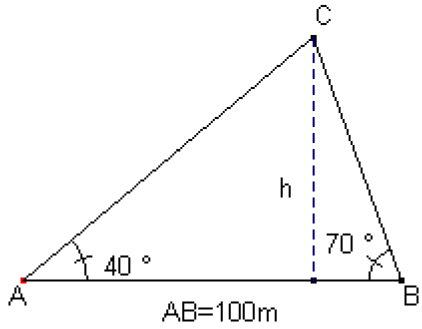
12 Determina el área del paralelogramo siguiente:



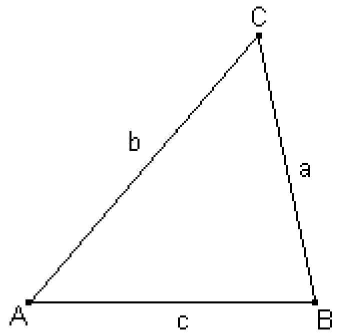
13 Determina los ángulos del paralelogramo siguiente:



14 Calcula la altura h de la siguiente figura:

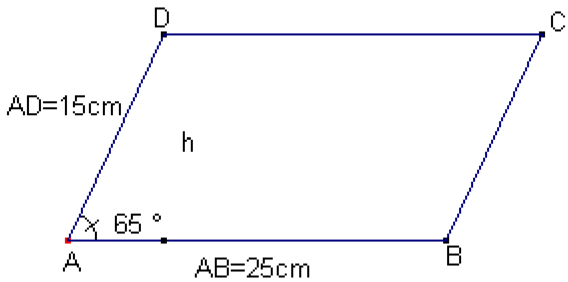


15 Resuelve los siguientes triángulos conocidos:
a) $b = 20cm, c = 35cm, A = 55º$
b) $a = 15cm, b = 25cm, c = 35cm$
c) $a = 20cm, A = 35º, B = 75º$
d) $c = 15cm, A = 25º, B = 65º30'$
e) $a = 30cm, b = 55cm, B = 80º$
f) $a = 10cm, b = 10cm, c = 8cm$
g) $a = 10cm, b = 45cm, C = 30º45'$
h) $a = 20cm, c = 60, A = 25º$



16 Calcula el área de los triángulos conocidos:
a) $a = 25cm, c = 35cm, B = 55º$
b) $a = 10cm, b = 25cm, c = 30cm$
c) $c = 25cm, A = 35º, B = 75º$
d) $a = 30cm, b = 60cm, B = 80º$

17 En el siguiente paralelogramo calcula las diagonales.



18 Calcula la longitud de los lados de un triángulo isósceles sabiendo que la altura sobre el lado desigual mide 15cm y el ángulo desigual 80º.

19 Resuelve un triángulo isósceles sabiendo que los lados iguales miden 10cm y el área mide $40cm^2$.