FUNCIONES

Recuerda:

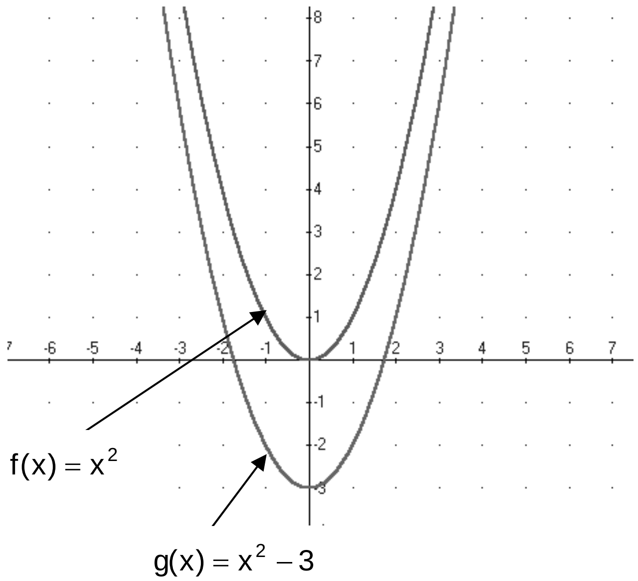
- Una función es una correspondencia entre dos conjuntos (relación entre magnitudes), de forma que a cada elemento del conjunto inicial le corresponde sólo un elemento del conjunto final.
- $y = f(x)$ es una forma de llamar a una función. Diremos que x es la variable independiente y que y es la variable dependiente. También diremos que y es imagen de x, y que x es una antiimagen de y. Lo representaremos por $x = f^{-1}(y)$.
- La gráfica de una función f(x) es la representación en unos ejes cartesianos de los pares de valores (x, f(x)).
- Representamos las funciones en los ejes de coordenadas. La variable independiente, x, se representa en el eje de abscisas y la variable dependiente, y, se representa en el eje de ordenadas
- El dominio de una función es el conjunto de los elementos que tienen imagen.
- El recorrido de una función es el conjunto de los elementos que son imagen de otros.

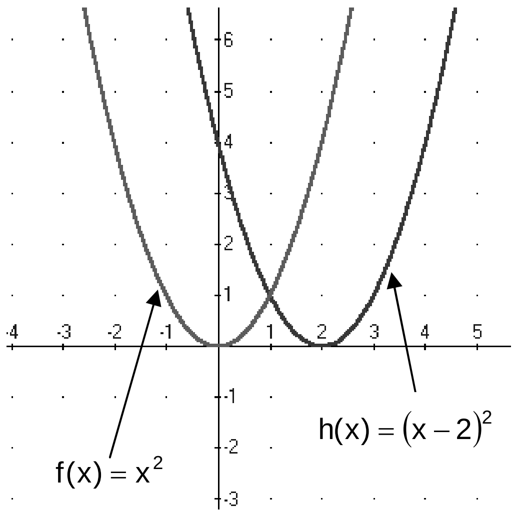
Traslaciones de funciones:

Sea la función $f(x)$

La función $g(x) = f(x) + p$ realiza una traslación vertical de p unidades de la función $f(x)$

La función $h(x) = f(x - q)$ realiza una traslación horizontal de q unidades de la función $f(x)$.



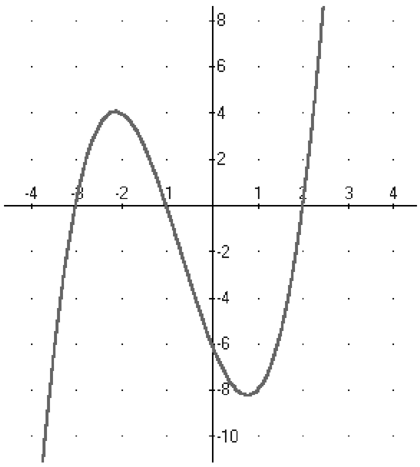


Características generales de una función.

Puntos de corte con el eje de abscisas.
Sea la función $f(x)$.
Los puntos de corte con el eje de abscisas o raíces de la función son los puntos $(x, 0)$ tales que $f(x) = 0$

Punto de corte con el eje de ordenadas.
Sea la función $f(x)$. El punto de corte con el eje de ordenadas es $(0, f(0))$.

Ejemplo:
Sea la siguiente función:



Notemos que los puntos de corte con el eje de abscisas son $(-3, 0)$, $(-1, 0)$, $(2, 0)$
El punto de corte con el eje de ordenadas es $(0,-6)$

Crecimiento:
Diremos que una función $f(x)$ es creciente en el intervalo $[a,b]$
si $x_1, x_2 \in [a,b]$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
Es decir, al aumentar la variable independiente aumenta la variable dependiente.

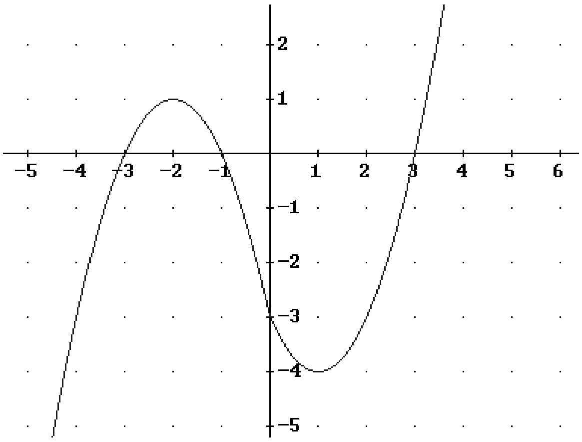
Diremos que una función $f(x)$ es decreciente en el intervalo $[a,b]$
si $x_1, x_2 \in [a,b]$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
Es decir, al aumentar la variable independiente aumenta la variable dependiente.

Extremos locales: Máximos y mínimos.
Diremos que un valor $x = a$ es un máximo de la función si alrededor de este valor las imágenes de la función son menores que $f(a)$

Diremos que un valor $x = a$ es un mínimo de la función si alrededor de este valor las imágenes de la función son mayores que $f(a)$

Continuidad:
Diremos que la función $f(x)$ es continua en un intervalo $[a,b]$ cuando se puede dibujar de un solo trazo sin levantar el lápiz del papel.

Ejemplo:
Estudia los puntos de corte, crecimiento decrecimiento y extremos locales de la siguiente función:



Los puntos de corte con el eje de abscisas son: $(-3,0)$, $(-1,0)$, $(3,0)$
El punto de corte con el eje de ordenadas es: $(0,-3)$
La función es creciente en el intervalo: $]-\infty,-2[\cup]1,+\infty[$
La función es decreciente en el intervalo: $]-1,1[$
El punto $(-2,1)$ es un máximo de la función.
El punto $(1,-4)$ es un mínimo de la función.
La función es continua en tota la recta real.

Tasa de variación de una función en un intervalo.
Sea la función $f(x)$ y el intervalo $[a,b]$
Llamamos tasa de variación de la función $f(x)$ en el intervalo $[a,b]$ al valor $f(b)-f(a)$

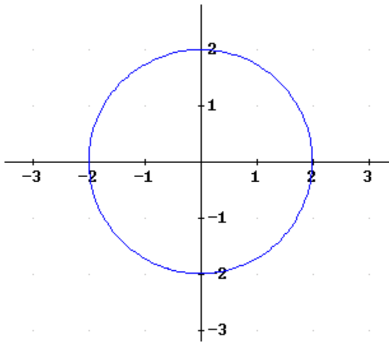
Tasa media de variación de una función en un intervalo.
Sea la función $f(x)$ y el intervalo $[a,b]$
Llamamos tasa media de variación de la función $f(x)$ en el intervalo $[a,b]$ al valor $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

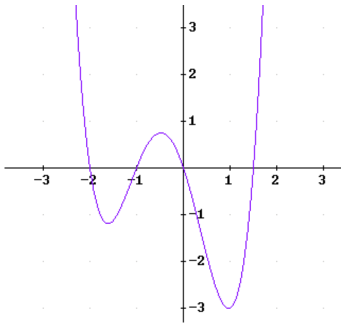
Ejemplo:
Sea la función $f(x)=2x^3-3x+1$
a) Calcula la tasa de variación de la función en el intervalo $[-2,1]$
b) Calcula la tasa media de variación de la función en el intervalo $[-2,1]$

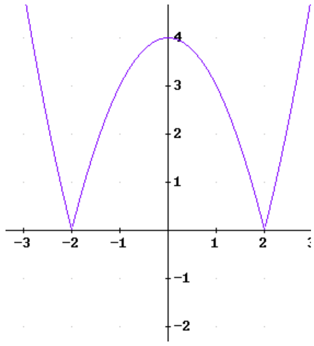
a)
$f(-2)=2(-2)^3-3(-2)+1=-9$ $\qquad$ $f(1)=2\cdot1-3\cdot1+1=0$
$f(1)-f(-2)=0-(-9)=9$
b)
$$\frac{f(1)-f(-2)}{1-(-2)}=\frac{0-(-9)}{1+2}=3$$

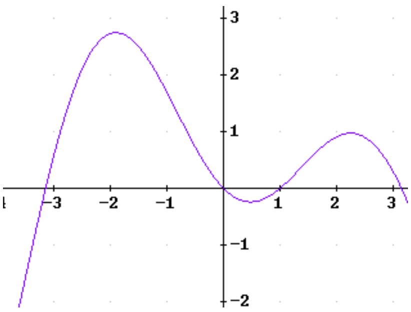
Ejercicios propuestos

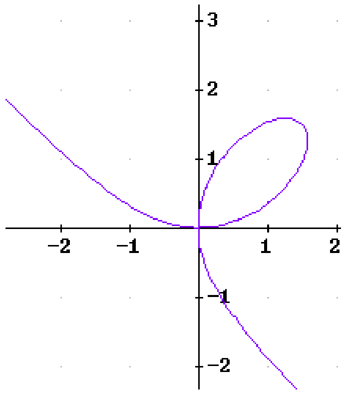
1. De las siguientes gráficas indica cuales son funciones y cuales no.

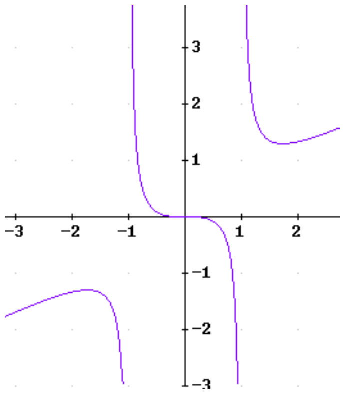

a)


b)


c)

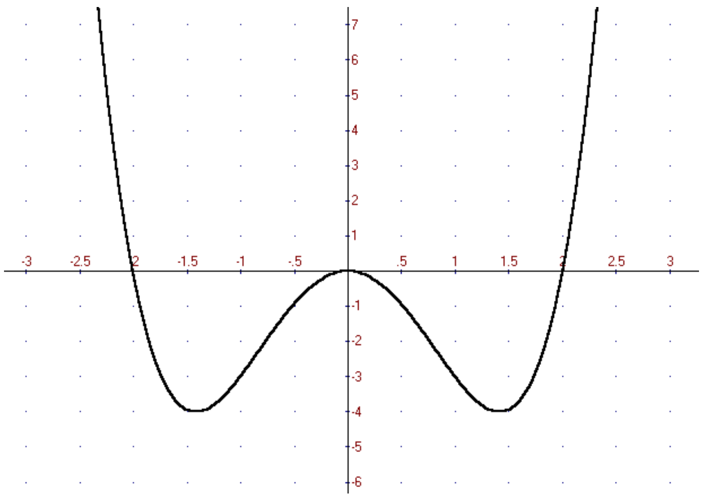

d)


e)


f)

2. Sea la gráfica de la función $y = f(x)$:

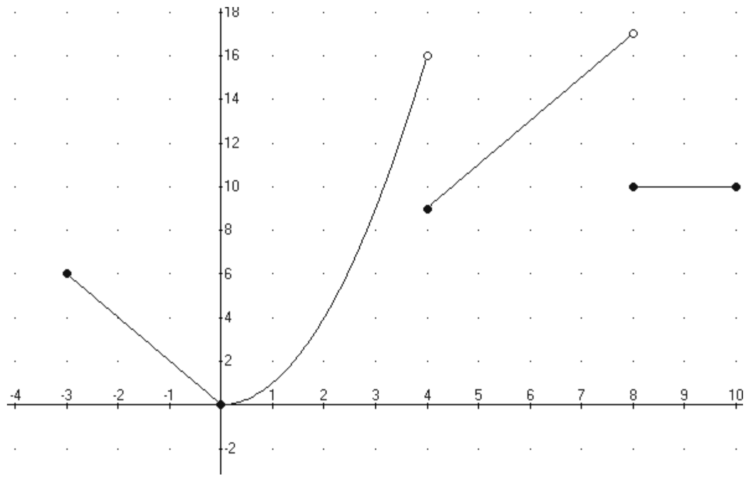
a) Determina los puntos de corte.
b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
c) Determina los extremos locales.
d) Calcula: $f(0.5)$, $f(-1)$, $f(1.5)$
e) Calcula: $f^{-1}(1)$, $f^{-1}(0)$, $f^{-1}(-1)$



3. La gráfica de la función representa los precios del autobús a una ciudad imaginaria. En el eje de abscisas representamos los años y en el de ordenadas los precios en pesetas.

a) ¿Cuánto costaba un billete el año 1995?
b) ¿Durante que periodo el billete costaba 105 pesetas?
c) Estudia la subida de los precios del autobús .
d) En el año 1994 y en el 1998 hay una bajada del precio del carburante muy importante. ¿Piensas que queda reflejada a la gráfica?.

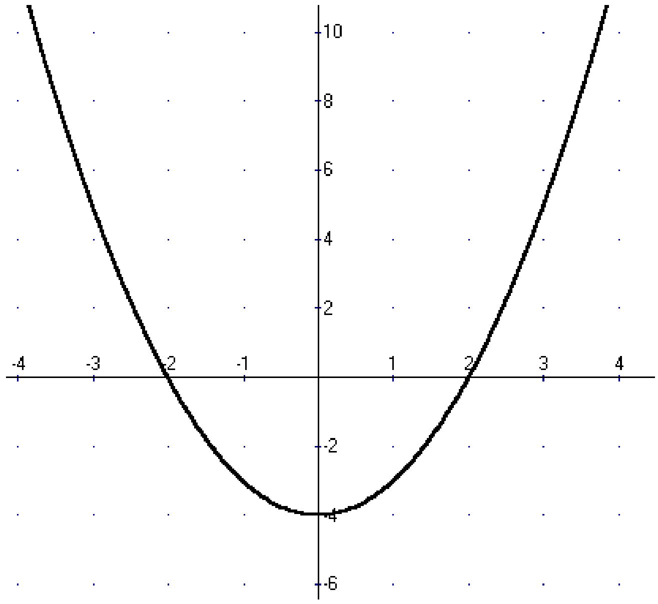
4. Sea la gráfica siguiente:



a) Estudia el dominio.
b) Estudia el recorrido.
c) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
d) Calcula $f(-3)$, $f(0)$, $f(8)$, $f(2)$, $f(4)$, $f(-1)$
e) Calcula $f^{-1}(17)$, $f^{-1}(8)$, $f^{-1}(4)$, $f^{-1}(6)$, $f^{-1}(0)$

5. Sea la gráfica de la función $f(x)$:

a) Determina los puntos de corte.
b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
c) Calcula la variación de la función en el intervalo $[0,2]$
d) Calcula la variación de la función en el intervalo $[-3,1]$.
e) Calcula la tasa media de variación en el intervalo $[-2,0]$.
f) Calcula la tasa media de variación en el intervalo $[1,3]$



6. Sea la función $f(x) = -2x + 3$.

a) Determina el dominio.
b) Determina los puntos de corte.
c) Calcula $f(-3)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(5)$.
d) Calcula $f^{-1}(-4)$, $f^{-1}(-1)$, $f^{-1}(0)$, $f^{-1}(3)$
e) Calcula la variación de la función en el intervalo $[-2,1]$
f) Calcula la variación de la función en el intervalo $[1,4]$
g) Calcula la tasa media de variación de la función en el intervalo $[-5,-3]$.
h) Calcula la tasa media de variación de la función en el intervalo $[1,5]$.

7. Sea la función $f(x) = x^2 + 5x - 6$

a) Determina el dominio.
b) Determina los puntos de corte.
c) Calcula $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(4)$.
d) Calcula $f^{-1}(-4)$, $f^{-1}(-15)$, $f^{-1}(0)$, $f^{-1}(2)$
e) Calcula la variación de la función en el intervalo $[-3,0]$
f) Calcula la variación de la función en el intervalo $[1,4]$
g) Calcula la tasa media de variación de la función en el intervalo $[-7,-3]$
h) Calcula la tasa media de variación de la función en el intervalo $[2,5]$.

8. Dibuja a unos ejes de coordenadas (espacio/tiempo), el recorrido efectuado por un coche que hace un viaje de 3 horas y media a una velocidad de 100 km/h, descansa un hora y continua viajando para recorrer 350 km en 3 horas.

a) ¿Cuántos kilómetros ha recorrido?
b) ¿Cuánto tiempo ha invertido para hacer el viaje?
c) Calcula la velocidad media.

9. Sabemos que 0°centígrados son 32°fahrenheit, y que 100ºcentígrados son 212ºfahrenheit. Rellena la tabla siguiente y escribe una función que sirva para transformar grados centígrados en grados fahrenheit.

°C	0	15	20	36	38
°F	32				

Una persona a temperatura normal 36’5ºC, ¿cuántos grados fahrenheit tiene?.
¿Y si tiene una fiebre de 37’5 °C?

10. Vamos al mercado para comprar manzanas que cuestan a 1,5€/kg.
Queremos saber cuánto tenemos que pagar según los kilos que compremos.

a) Completa la tabla siguiente:

kg	0,25	0,5	0,75	1	1,5	2	1,5	3	4
€									

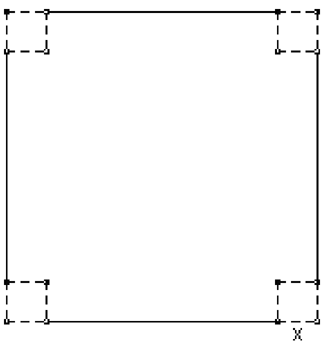
b) Representa la tabla de valores en unos ejes de coordenadas.
c) Define la función que relacione los quilos de manzanas y lo que tenemos que pagar.

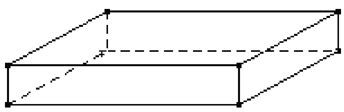
11. En la tabla siguiente muestra la relación entre el lado de un cuadrado y su área.

x (lado, cm)	1	3	6	7	8	9	12	14
y (área, cm^2)		9						

Determina la fórmula que relaciona el lado y el área. Dibújala.

12. Con una cartulina cuadrada de $100cm^2$ queremos construir una caja de base cuadrada cortando un cuadrado a cada esquina. Determina el volumen de la caja en función de los centímetros del lado del cuadrado que cortamos.

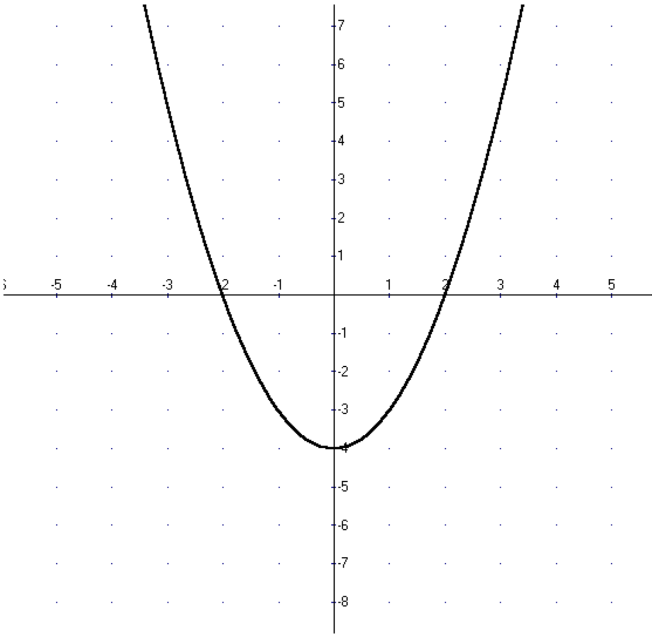




Representa la función en los ejes coordenadas.

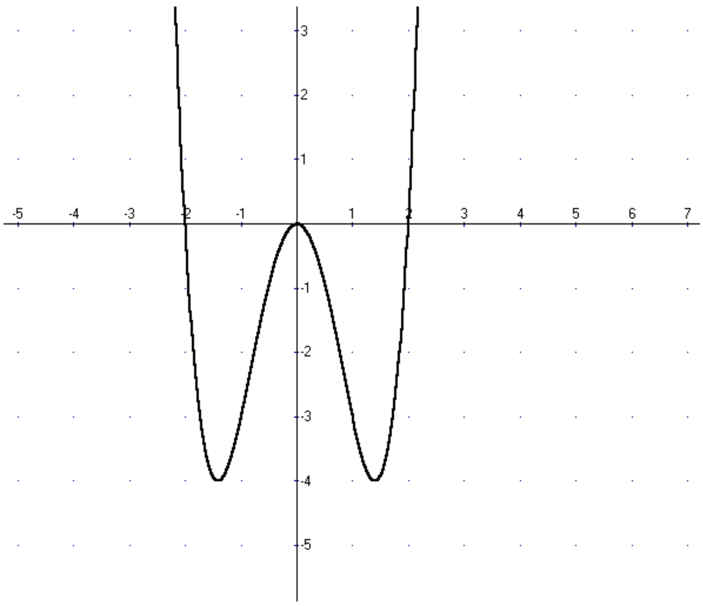
13. Dada la gráfica de la función $f(x)$. Representa en los mismos ejes de coordenadas las funciones:

a) $g(x) = f(x) + 2$
b) $h(x) = f(x) - 3$
c) $k(x) = f(x) + 1$
d) $m(x) = f(x + 2)$
e) $n(x) = f(x - 1)$
f) $p(x) = f(x - 4)$



14. Dada la gráfica de la función $f(x)$. Representa en los mismos ejes de coordenadas las funciones:

$g(x) = f(x) + 1$
$h(x) = f(x) - 2$
$k(x) = f(x) + 3$
$m(x) = f(x + 1)$
$n(x) = f(x - 2)$
$p(x) = f(x - 3)$



15. Sea la función $f(x) = x^2$. Determina las funciones:

$g(x) = f(x) + 3$
$h(x) = f(x) - 4$
$k(x) = f(x) + 5$
$m(x) = f(x + 3)$
$n(x) = f(x - 4)$
$p(x) = f(x - 3)$