ejercicios 10 resueltos modelos

E.A.A.

J.Mtnez.Lejarza-I.Mtnez.Lejarza

1.-(Basado en Eva Ferreira -María Araceli Marín, parámetros cambiados) La cuantía por reclamación, X, (en miles de euros) en una compañía aseguradora es una v.a. con distribución de Pareto de parámetros α= 3 (miles de euros) $x_0 = 2,6$.

La compañía decide reasegurarse con el banco SINFON, de manera que dicho banco cubra las reclamaciones por encima de los 6000 euros.

a) Obtener la función de densidad de la v.a. X.

b) Calcular su media y su varianza.

c) Calcular la probabilidad de que en una reclamación, la cuantía supere los 6000 euros.

d) Si sabemos que la cuantía de una reclamación ha superado los 6000 euros, calcular la probabilidad de que supere los 9000.

a) dado que se trata de un modelo/distribución de Pareto su función de densidad es :

$f(x) = \frac{\alpha}{x} \cdot \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\alpha} = \frac{\alpha \cdot x_0^{\alpha}}{x^{\alpha+1}}$ de manera que conocidos los parámetros dicha función será:

$$f(x) = \frac{\alpha}{x} \cdot \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\alpha} = \frac{\alpha \cdot x_0^{\alpha}}{x^{\alpha+1}} = \frac{3 \cdot 2,6^3}{x^{3+1}} = \frac{52,728}{x^4}$$

b) la media viene dada por:

$$E[x] = \mu = \int_{x_0}^{\infty} \frac{x \alpha x_0^{\alpha}}{x^{\alpha+1}} dx = \frac{\alpha x_0}{\alpha - 1} = \frac{3 \cdot 2,6}{2} = 3,9$$

la varianza se obtendrá :

$$\operatorname{var}[x] = \frac{\alpha x_0^2}{(\alpha - 2)(\alpha - 1)^2} \quad asi \operatorname{var}[x] = \frac{3 \cdot 2,6^2}{(3-2) \cdot (3-1)^2} = \frac{20,28}{4} = 5,07$$

c) probabilidad de que cuantía supere 6000 euros será $P(x > 6)$ luego:

$$P(x > 6) = 1 - \int_{2,6}^{6} f(x) dx = 1 - \int_{2,6}^{6} \frac{52,728}{x^4} dx =$$

$$1 - \left[-17,576 \left[x^{-3} \right]_{2,6}^{6} \right] = 1 - 0,918630 = 0,08$$

o bien :

$$1 - F(6) = 1 - (1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\alpha}) = 1 - \left(1 - \left(\frac{2,6}{6}\right)^3\right) = 1 - (1 - 0,08137) = 0,08137$$

d) si sabemos que ha superado 6000 (x>6) será una probabilidad condicionada asi:

$$P\left(x>9 \big/ x>6\right)=\frac{P\left((x>9)\cap(x>6)\right)}{P(x>6)}=\frac{P(x>9)}{P(x>6}=\frac{0,0241}{0,0813}=0,285$$

ya que $S(9)=\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\alpha}=\left(\frac{2,6}{9}\right)^{3}=0,02410$

2.-Un siniestro tiene para su cuantía monetaria una función de distribución lgN(μ=7, σ=1,5)
a) ¿cuál es la probabilidad de tener un siniestro de cuantía inferior a 200?
b) ¿cuál es la probabilidad de tener un siniestro de cuantía superior a 1000?
a)
Sea X la variable aleatoria “cuantía del siniestro

$X \to \lg N[7;1,5]$
¿$P(x<200)$ tipificando
$$P(t<\frac{\ln 200-7}{1,5})=P(t<\frac{5,298-7}{1,5})=P(t<-1,134)$$

$P(t<-1,134)=P(t>1,134)=1-F(1,134)$ =0,128 en la tabla de la N[0,1]

b) ¿$P(x>1000)$ tipificando
$$P(t>\frac{\ln 1000-7}{1,5})=P(t>-0,0614)=P(t<0,0614)$$
$$P(t<0,0614)=F(0,0614)=0,524$$

3.- La distribución del coste de un siniestro de una cartera de seguros, sigue una distribución de Pareto de parámetros α=2 y k=300,
a) ¿cuál es la proporción de siniestros que exceden los 600?
b) ¿ cuál es el coste medio?
c) Calcular el coste medio de los siniestros que exceden de 600

el seguirá un modelo/distribución
$x \Rightarrow Pareto(\alpha=2; x_0=300)$
a)

$$P(x>600)=1-F(600)=1-(1-\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\alpha})=1-\left(1-\left(\frac{300}{600}\right)^{2}\right)=1-(1-0,25)=0,25$$

o bien :
$$S(600)=\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\alpha}=\left(\frac{300}{600}\right)^{2}=0,25$$

b) el coste medio vendrá dado por:

$$E\left[x\right]=\mu=\int_{x_0}^{\infty}\frac{x\alpha x_0^{\alpha}}{x^{\alpha+1}}dx=\frac{\alpha x_0}{\alpha-1}=\frac{2\cdot 300}{1}=600$$

c)

$$f(x/x>600)=\frac{f(x)}{P(x>600)}=como\ \ ya\ \ vimos=\frac{f(x)}{0,25}$$

dado que $f(x)=\frac{\alpha}{x}\cdot\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\alpha}=\frac{\alpha\cdot x_0^{\alpha}}{x^{\alpha+1}}=\frac{2\cdot 300^2}{x^{2+1}}=\frac{180000}{x^3}$

$$E\left[x/x>600\right]=\int_{600}^{\infty}x\cdot\frac{f(x)}{0,25}dx=1/0,25\int_{600}^{\infty}x\cdot\frac{180000}{x^3}dx=720000\int_{600}^{\infty}x^{-2}dx=$$

$$720000\left[-x^{-1}\right]_{600}^{\infty}=720000\cdot\frac{1}{600}=1200$$

obsérvese que el limite inferior es 600 , no 300 , ya que condicionamos a que es >600

4.-La proporción de pólizas de hogar que durante el año tienen algún siniestro sigue una distribución Beta $x\to beta(\alpha,\beta)=beta(0,3;0,5)$

a) hallar la media y varianza de la proporción de siniestros

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la proporción de hogares con algún siniestro sea como máximo del 45%?

c) Con una probabilidad de 0,8 ¿que porcentaje como máximo de hogares tendrán algún siniestro?

a) $x\to beta(\alpha,\beta)=beta(0,3;0,5)$

conocemos que

$$\mu=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\qquad \sigma^2=\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2.(\alpha+\beta+1)}\qquad \mu_0=\frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-2}$$

media $\mu=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}=\frac{0,3}{0,3+0,5}=0,375$

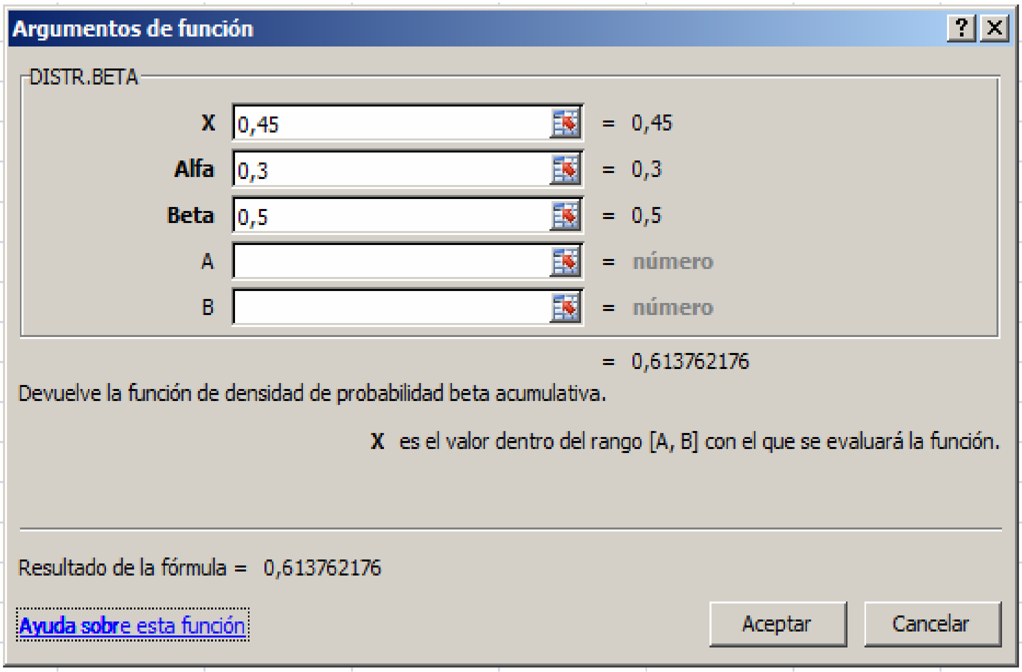
varianza

$$\sigma^2=\text{var}[x]=\frac{\alpha\cdot\beta}{\left(\alpha+\beta\right)^2\cdot(\alpha+\beta+1)}=\frac{0,3\cdot 0,5}{\left(0,3+0,5\right)^2\cdot(0,3+0,5+1)}=$$

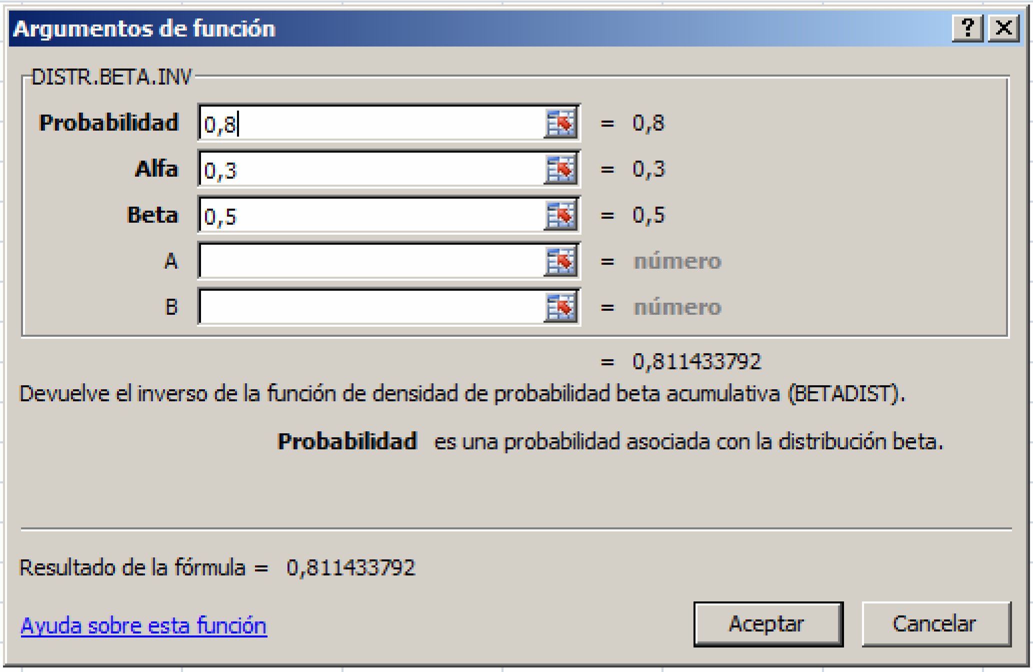
$$=\frac{0,15}{0,64\cdot 1,8}=\frac{0,15}{1,152}=0,13$$

b)

no piden $P(x < 0,45) = F(0,45) = 0,613$ realizado el cálculo con Excel



c) nos piden $P(x < pr) = 0,8 \rightarrow 0,811$ realizado el cálculo en Excel



5.-Un asegurador ha observado que en una de sus carteras en promedio tiene 5 siniestros anuales superiores a los 3 millones de Euros. Los datos de los últimos 10 siniestros que superan esta magnitud son: {3,2 ; 4 ; 5 ; 4,5 ; 3,1 ; 3,8 ; 7 ; 3,2 ; 3,4 ; 4 } Suponiendo que la variable aleatoria "Coste del siniestro en millones de Euros" sigue una distribución de Pareto .Calcular:

a) Probabilidad de tener un siniestro que cueste más de 20 millones de Euros.

b)¿Cada cuantos años se espera un siniestro de más de 20 millones de Euros?

c) Si la cartera está formada por 200.000 pólizas que se renuevas anualmente, ¿cuánto cuesta por póliza el reaseguro de los siniestros de más de 20 millones?

el seguirá un modelo/distribución
$x \Rightarrow Pareto(\alpha = ?; x_0 = 3)$
estimamos la media en base a la muestra

$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = 4{,}12$ con lo que podemos suponer que

$$4{,}12 = E[x] - = \frac{\alpha x_0}{\alpha - 1} = \frac{\alpha \cdot 3}{\alpha - 1} \to 4{,}12\alpha - 4{,}12 = 3\alpha \to$$
$$\to 4{,}12 = 1{,}12\alpha \to \alpha = 3{,}68$$

luego $x \Rightarrow Pareto(\alpha = 3{,}68; x_0 = 3)$

a) $P(x > 20) =$

$$S(20) = \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\alpha} = \left(\frac{3}{20}\right)^{3{,}68} = 0{,}0009$$

b) dado que la probabilidad de que se produzca un siniestro de cuantía superior a 20 M es menor del 1 por mil y se producen 5 siniestros al año .. se presumen 200 años .. (mil siniestros) para que ocurra uno de esta envergadura (uno cada 200 años)

c) el coste esperado para siniestros mayores a 20M será

$$E[x] = \frac{\alpha \cdot x_0}{\alpha - 1} = \frac{3{,}68 \cdot 20}{3{,}68 - 1} = \frac{73{,}6}{2{,}68} = 27{,}46$$

x_0 *ahora* 20

dado que se trata de renovación anual y de que se producen 5 al año
$C_{unitario} = 27{,}46$
$C_a = 5 \cdot C_{unitario}$
$E[c_a] = 5 \cdot E[c_{unitario}] = 5 \cdot 27{,}46 \cdot P(x > 20) = 5 \cdot 27{,}46 \cdot 0{,}00093 = 0{,}1279 \ \ M.euros$
si tenemos 200000 pólizas

127900/200000=0,6395 euros de repercusión

6.El coste de un siniestro sigue un a distribución normal de media 1 millón de euros, con una desviación estándar de 300.000 euros. Si los siniestros son independientes y se producen 5 siniestros.

a) Calculad la probabilidad de que el coste total supere los 7 millones de euros.
b) Calculad la probabilidad de que ningún siniestro sea superior a 1 millón de euros

a) $C \to N[1; 0{,}3] Meuros$
dado que los costes no son iguales
$C_t = C + C + C + C + C$

$$C_t \to N\left[5; \sqrt{0{,}3^2 + 0{,}3^2 + 0{,}3^2 + 0{,}3^2 + 0{,}3^2}\right] = N[5; 0{,}67]$$

$$P(C_t > 7) = P\left(t > \frac{7-5}{0,6708}\right) = P\left(t > 2,98\right) = 1 - F(2,98) = 0,01$$

b) probabilidad de mayor que 1 millón es evidentemente 0,5 pues

$C \to N\left[1;0,3\right] Meuros$

Y=número de siniestros mayores de 1M de 5 es un modelo

$Y \to B\left(5;0,5\right)$

$$P(Y=0) = \binom{5}{0} 0,5^5 0,5^0 = 0,03125$$

7.-El coste que suponen los siniestros que tramita la central de una entidad en un día oscilan uniformemente entre 60 y 120 (miles de euros). Si los días son independientes entre sí, calculad la probabilidad de que en cinco días se superen las 500000 euros

$C_d \to U\left[60;120\right] miles\ euros$

$C_{5d} \to U\left[300;600\right] miles\ euros$

$$P(C_{5d} > 500) = P\left(500 < C_{5d} < 600\right) =$$

$$= \int_{500}^{600} \frac{1}{b-a} dx = \int_{500}^{600} \frac{1}{600-300} dx = \frac{1}{300}\left[x\right]_{500}^{600} = 0,333$$

8.-Un conjunto de pólizas tienen dos tipos de coberturas. Para cada una de ellas el coste del siniestro sigue una distribución log-normal de medias 1 y 2 respectivamente y desviaciones típicas también 1 y 2 respectivamente. Suponiendo que los dos costes son independientes.

a) Hallar que distribución sigue el producto de los dos costes.

b) Calcular el valor esperado del producto de los dos costes.

a)

$X \Rightarrow LN\left[1;1\right] \quad e \quad Y \Rightarrow LN\left[2;2\right]$

$luego$

$\ln X \Rightarrow N\left[1;1\right] \ e \ \ln Y \Rightarrow N\left[2;2\right]$

$P = X \cdot Y \Rightarrow \ln P = \ln X + \ln Y$

$\ln P \to N\left[1+2;\sqrt{1^2+2^2}\right] = N\left[3;2\right]$

$Luego \quad P \to LN\left[3;2\right]$

b) valor esperado del producto , ya que se trata de una Lognormal:

$$E\left[p\right] = \mu_p = e^{\mu_{\ln p} + \frac{1}{2}\sigma_{\ln p}} = e^{3+\frac{1}{2}2} = e^3 = 20,08$$

9.-Mediante análisis de valores de períodos anteriores hemos llegado a la conclusión que los rendimientos anuales de la cartera de valores que controlamos se aproxima a una distribución de Cauchy con parámetro de ubicación 3 y de escala 2 .(en miles de euros). Con esa información calcular la probabilidad de que el año próximo el rendimiento sea superior a 4000 euros.

X= rendimiento anual en miles de euros

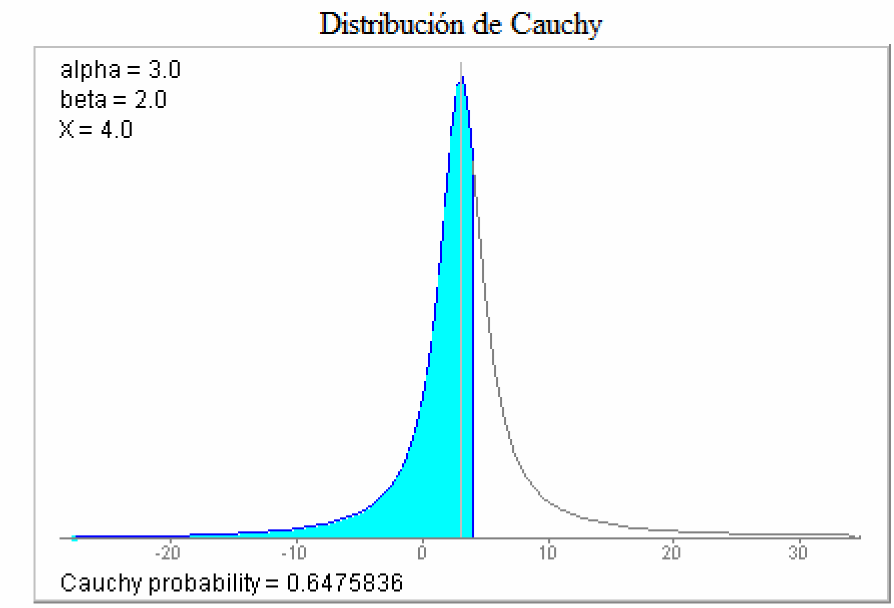
$$X \to C(\alpha = 3; \lambda = 2)$$

$$P(x > 4) = 1 - F(4) = 1 - \left[\frac{1}{\pi} arctg\left(\frac{x-\alpha}{\lambda}\right) + \frac{1}{2}\right] =$$

$$1 - \left[\frac{1}{\pi} arctg\left(\frac{4-3}{2}\right) + \frac{1}{2}\right] = 1 - \left[\frac{1}{\pi} arctg\left(1/2\right) + \frac{1}{2}\right] =$$

$$1 - \left[\frac{1}{\pi} 0,46364 + \frac{1}{2}\right] = 1 - 0,64758 = 0,352419$$

en programa http://www.aulademate.com/contentid-306.html



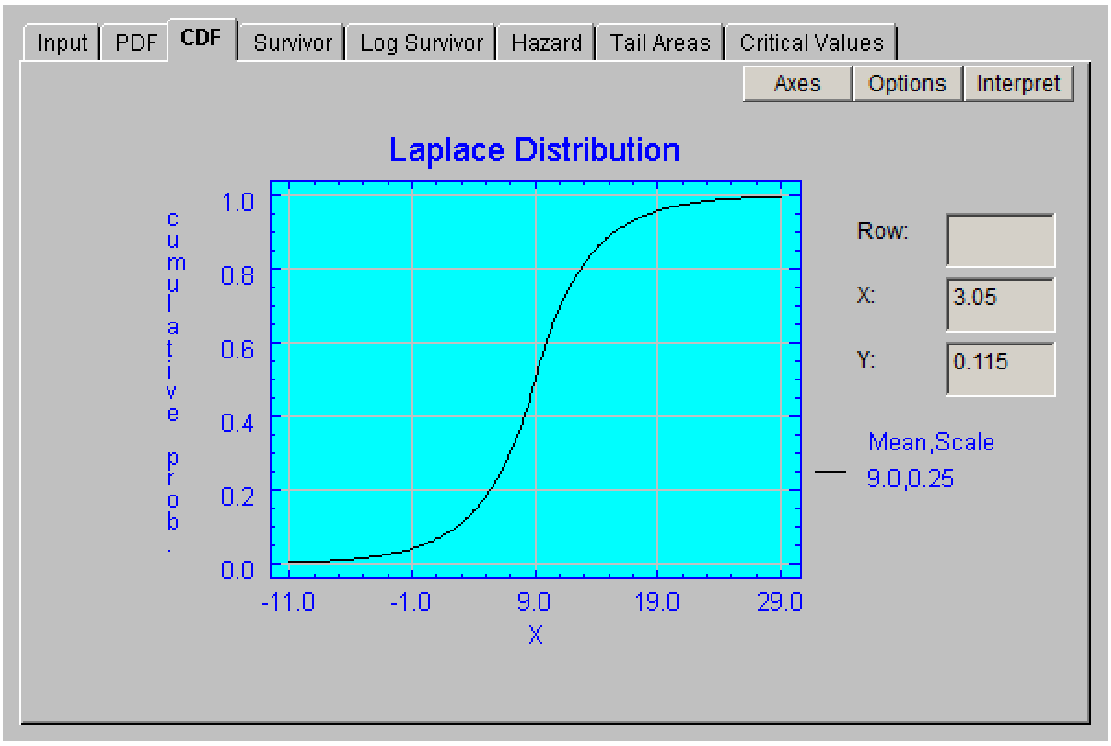
10.- Las pagos, en miles de euros ,por hacer frente a las pólizas de seguro agrario por daños que produzca el "cococuqui-poliforme" (animal salvaje donde los haya) se estiman que seguirán una distribución de Laplace de media 9 y escala 4. Con esta información calcular la probabilidad de que nuestras pagos no excedan de 3000 euros.

X= pagos por pólizas

$$X \to Lp(\alpha = 9, \lambda = 1/4) \quad S = 4$$

$$P(X<3)=F(3)=\frac{1}{2}e^{-\left(\frac{\alpha-x}{s}\right)}=\frac{1}{2}e^{-\left(\frac{9-3}{4}\right)}=$$

$$=\frac{1}{2}e^{-\left(\frac{9-3}{4}\right)}=0{,}1115$$



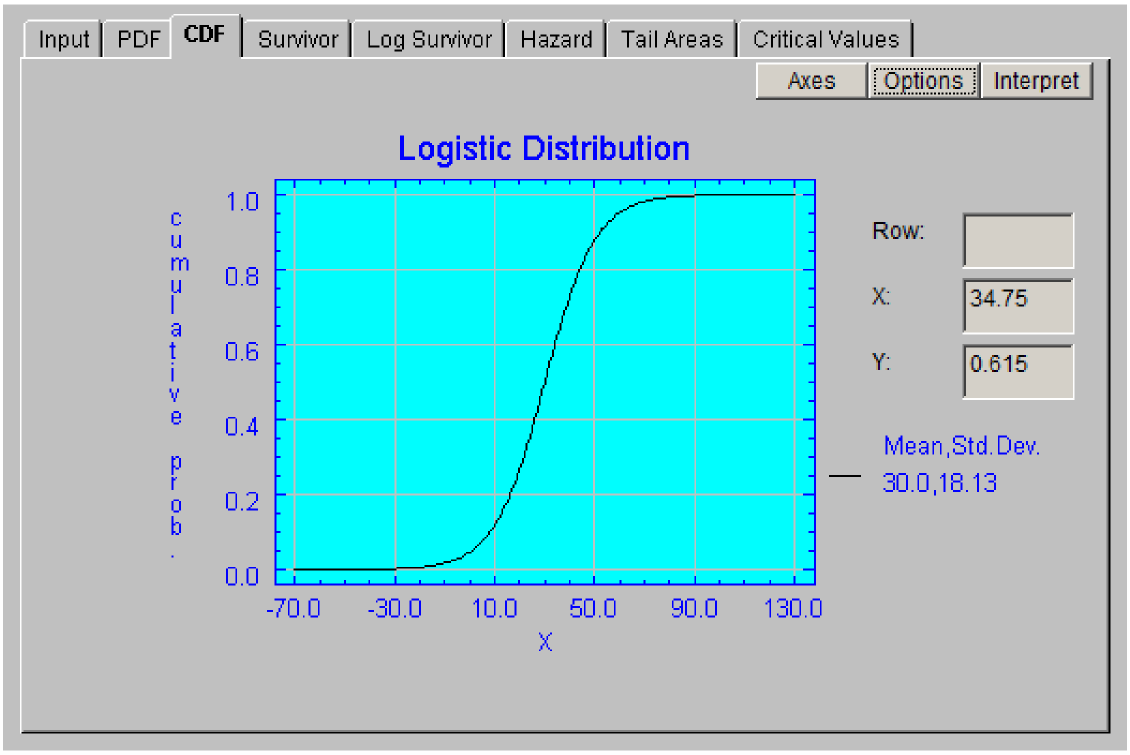
obsérvese la diferencia de denominación de parámetro de escala , en el programa la escala es $1/S=\lambda$, siendo el resultado el mismo

http://www5555.morris.umn.edu/~sungurea/statlets/free/pdist.htm

11.-El número de personas (en miles) que cogerán la gripe este año se presupone una distribución logística de parámetros media= 30 y escala 10.
a)Calcular la probabilidad de que este año haya menos de 35000 afectados.
b)Calcular la misma probabilidad si el modelo fuera una Normal con desviación típica 18,1379

$$X\to Log(\alpha,\beta)=Log(30,10)$$

$$P(x<35)=\frac{1}{1+e^{-\frac{x-\alpha}{b}}}=\frac{1}{1+e^{-\frac{35-30}{10}}}=\frac{1}{1+e^{-0,5}}=0,6224$$



obsérvese que el programa trabaja con la desviación típica.

$$Var[x] = \frac{\pi^2}{3}\beta^2 \to 3,289868 \cdot 100 = 328,86 = Var[x]$$

$$\sigma = \sqrt{328,86} = 18,1379$$

para idénticos resultados

http://www5555.morris.umn.edu/~sungurea/statlets/free/pdist.htm

b) en el caso de Normal:

$$x \to N[30;18,7379]$$

$$P(x<35) = P\left(z < \frac{35-30}{18,7379}\right) = P(z < 0,26683) = 0,605$$

normal menos apuntada., menor probabilidad

12.-La proporción de asegurados que se rompen la pierna esquiando en la temporada es del 10% de los tienen un accidente de esquí. Sabiendo que de nuestros asegurados ,por término medio en la temporada , 30 de ellos tienen accidentes de esquí . Calcular la probabilidad de que entre nuestros asegurados 6 de ello se rompan la pierna en la temporada.

X es numero de piernas rotas entre los que esquían .. claramente depende de cuantos esquían , es decir n

$$X \rightarrow B(n; 0{,}1)$$
$$n \rightarrow \wp(\lambda = 30)$$

distribución compuesta de Binomial (primaria) que depende de una Poisson (secundaria)

Así :

$$P(x = k) = \frac{e^{-p\lambda}(p\lambda)^k}{k!} \text{ así}$$
$$P(x = 6) = \frac{e^{-0{,}1 \cdot 30}(0{,}1 \cdot 30)^6}{6!} = \frac{e^{-3}(3)^6}{6!} =$$
$$\frac{0{,}04978 \cdot 729}{720} = 0{,}05$$

13.- Los valores máximos anuales de las indemnizaciones que hemos tenido que pagar en los últimos año se distribuyen según un modelo de Gumbel de moda 6 (en millones de euros) y escala 2.Con información calcular la probabilidad de que nuestro máximo a pagar este año no supere los 7 millones de euros.

X= valor máximo de indemnización anual

$$x \rightarrow Gumbel(\mu = 6; \sigma = 2)$$

$$P(x < 7) = F(7) = e^{-e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}}} =$$
$$= e^{-e^{-\frac{7-6}{2}}} = 0{,}5452$$