POSTGRAU | MÁSTER EN CIENCIAS ACTUARIALES Y FINANCIERAS

Ejercicios 4

Conocemos las tablas de mortalidad reducidas de los años(generaciones):

Edad	1975 lx	1980 lx	1985 lx	Edad	1975 lx	1980 lx	1985 lx	Edad	1975 lx	1980 lx	1985 lx
0	1000000	1000000	1000000	34	974004	973926	973859	68	893586	893487	893420
1	993228	993288	994567	35	973145	973067	973000	69	887124	887025	886958
2	992576	992536	992469	36	972315	972237	972170	70	880245	880146	880079
3	992235	992195	992128	37	971519	971441	971374	71	872987	872888	872821
4	991938	991898	991831	38	970741	970674	970607	72	865209	865110	865043
5	991690	991650	991583	39	969918	969851	969784	73	856735	856636	856569
6	991453	991413	991346	40	969032	968965	968898	74	847547	847448	847381
7	991241	991201	991134	41	968106	968039	967972	75	837591	837492	837425
8	991040	991000	990933	42	967126	967059	966992	76	826863	826764	826697
9	990857	990817	990750	43	966095	966028	965961	77	815410	815311	815244
10	990682	990626	990559	44	965028	964961	964894	78	803217	803118	803051
11	990517	990461	990394	45	963905	963838	963771	79	790225	790126	790059
12	990341	990285	990218	46	962709	962642	962575	80	776316	776217	776150
13	990162	990106	990039	47	961416	961349	961282	81	761552	761453	761386
14	989951	989895	989828	48	960080	960013	959946	82	745760	745661	745594
15	989699	989643	989576	49	958703	958636	958569	83	728977	728878	728811
16	989361	989305	989238	50	957123	957056	956989	84	711441	711342	711275
17	988897	988841	988774	51	955374	955307	955240	85	693376	693277	693210
18	988303	988216	988149	52	953448	953381	953314	86	674340	674241	674174
19	987614	987527	987460	53	951386	951319	951252	87	654208	654109	654042
20	986851	986764	986697	54	948967	948900	948833	88	633433	633334	633267
21	986010	985923	985856	55	946447	946380	946313	89	611812	611713	611646
22	985152	985065	984998	56	943784	943717	943650	90	589207	589108	589041
23	984248	984170	984103	57	940991	940924	940857	91	565680	565581	565514
24	983312	983234	983167	58	938011	937944	937877	92	541383	541284	541217
25	982355	982277	982210	59	934828	934761	934694	93	513018	512919	512852
26	981423	981345	981278	60	931507	931440	931373	94	480350	480251	480184
27	980489	980411	980344	61	927835	927768	927701	95	443066	442967	442900
28	979534	979456	979389	62	923885	923786	923719	96	401442	401343	401276
29	978562	978484	978417	63	919699	919600	919533	97	355658	355559	355492
30	977593	977515	977448	64	915266	915167	915100	98	306269	306170	306103
31	976663	976585	976518	65	910440	910341	910274				
32	975775	975697	975630	66	905163	905064	904997				
33	974883	974805	974738	67	899583	899484	899417				

1.- (Pavía, 79A) Un sujeto A de 1985 , contrata un seguro a los 33 años que conlleva una compensación por fallecimiento de 30000€ a 50 años, junto con otra de supervivencia de 100000€.
¿Qué prima de riesgo única pagará si las primas asociadas a la parte de fallecimiento y a la de supervivencia se calculan conjuntamente a partir de unas tablas recargadas al 2.5% de riesgo y con un l_o= 50000 y supuesto un tipo de interés nulo?

Considerar conjuntamente las dos primas supone tener en cuenta que :
a lo largo del periodo de 50 años con toda seguridad la compañía tendrá que pagar alguna de las dos indemnizaciones, ya que trascurridos los 50 años seguro que el cliente o bien ha sobrevivido y "cobra por ello 100000€" o bien ha muerto y "será su familia la que cobre 30000 €".
Por tanto al considerar las dos situaciones a la vez y no separadamente sabemos que la compañía pagará 30000€ (al menos) con toda seguridad y quizá 70000 más (100000 posibles- 30000 seguros) con cierta probabilidad : la probabilidad de que el cliente sobreviva .
De forma que la prima la calcularemos como:

$$\boxed{\pi = 30000 + 70000.{}_{50}p_{33}^{+}}$$

Con : $\boxed{{}_{50}p_{31}^{+} = \dfrac{l_{83}^{+}}{l_{33}^{+}}}$

y : $\boxed{l_x^{+} = l_0 \cdot {}_xp_0 + z_\alpha \sqrt{l_0 \cdot {}_xp_0 \cdot {}_xq_0}}$

Que con los valores de α= 0.025 $\rightarrow z_\alpha$=1.96 ; l_0=50000 y x= 33 y 83 tendremos:

$$l_{33}^{+} = 50000 \cdot 0.974738 + 1.96\sqrt{50000 \cdot 0.974738 \cdot 0.025262} = 48805.6731$$

$$l_{83}^{+} = 50000 \cdot 0.728811 + 1.96\sqrt{50000 \cdot 0.728811 \cdot 0.271189} = 36635.3929$$

De forma que :

$$\boxed{{}_{50}p_{33}^{+} = \frac{36635.3929}{48805.6731} = 0.750638}$$

Y la prima (sin actualizar) sería:

$$\boxed{\pi = 30000 + 70000.{}_{50}p_{33}^{+} = 30000 + 70000 \cdot 0.750638 = 82544.66 \quad euros}$$

2.- (JM. Pavia 74.A) Un cliente de 31 (generación 1985) contrata:
Seguro de vida por 30000€ a 50 años
Seguro de supervivencia por 50000€ a 50 años.

Determinar la prima (única en el momento del contrato) que debe pagar si:

- *La parte de la prima correspondiente a vida y la parte correspondiente a supervivencia se calculan separadamente a partir de tablas recargadas con un 2,5 % de riesgo

(garantía del 97,5%)

- Un l_0 de 5000
- Tipo de interés del 2 %

1) determinar la prima sin actualización financiera:

$$\boxed{\pi = 30000.{}_{50}q_{31}^{-} + 50000.{}_{50}p_{31}^{+}}$$

Con :

$$\boxed{{}_{50}q_{31}^{-} = 1 - \frac{l_{81}^{-}}{l_{31}^{-}} \qquad {}_{50}p_{31}^{+} = \frac{l_{81}^{+}}{l_{31}^{+}}}$$

y :

$$\boxed{l_x^{-} = l_0 \cdot {}_xp_0 - z_\alpha\sqrt{l_0 \cdot {}_xp_0 \cdot {}_xq_0} \qquad l_x^{+} = l_0 \cdot {}_xp_0 + z_\alpha\sqrt{l_0 \cdot {}_xp_0 \cdot {}_xq_0}}$$

Que con los valores de α= 0.025 $\rightarrow z_\alpha$=1.96 y l_0=5000 tendremos:

$$l_{31}^{-} = 5000 \cdot 0.976518 - 1.96\sqrt{5000 \cdot 0.976518 \cdot 0.023482} = 4861.6031$$

$$l_{81}^{-} = 5000 \cdot 0.761386 - 1.96\sqrt{5000 \cdot 0.761386 \cdot 0.238614} = 3747.8566$$

$$l_{31}^{+} = 5000 \cdot 0.976518 + 1.96\sqrt{5000 \cdot 0.976518 \cdot 0.023482} = 4903.5769$$

$$l_{81}^{+} = 5000 \cdot 0.761386 + 1.96\sqrt{5000 \cdot 0.761386 \cdot 0.238614} = 3866.0033$$

De forma que :

$$\boxed{{}_{50}q_{31}^{-} = 1 - \frac{3747.8566}{4861.6031} = 0.2291 \qquad {}_{50}p_{31}^{+} = \frac{3866.0033}{4903.5769} = 0.7884}$$

Y la prima (sin actualizar) sería:

$$\boxed{\pi = 30000.{}_{50}q_{31}^{-} + 50000.{}_{50}p_{31}^{+} = 30000.0.2291 + 50000.0.7884 = 46293}$$

Lo que si suponemos el interés del 2% en esos 50 años supone que la prima a pagar será:

$$\Pi = \pi(1+i)^{-50} = \frac{46293}{1.02^{50}} = 17199.14$$

3.- (JM Pavia 74.B) Considerando una cartera con 400 individuos similares al del apartado A(ejercicio anterior). Si se desea un riesgo de cartera del 10% ¿ en qué cuantía habrá que disminuir o aumentar lo recaudado por las primas (que son las calculadas en A).

Si el riesgo de cartera con el que queremos trabajar es del 10% . Llamando C a los compromisos que puede haber que asumir R al valor de lo recaudado por concepto de primas y K a esa cantidad a incrementar o sustraer tendrá que cumplirse que :

P(C>R+K)= 0.1

R = 400.π = 400. 46293 =18517200 €

Y los compromisos son aleatorios dependiendo del número de fallecidos, F , y del de supervivientes , S:

C= 30000F+50000S= 30000(400-S)+ 50000S=12000000+20000 .S

Como S$\rightarrow$B(400; ${}_{50}p_{31}$) que podemos aproximar por una normal:

$$S \underset{aprox}{\rightarrow} N\left(400.{}_{50}p_{31}; \sigma = \sqrt{400.{}_{50}p_{31} \cdot {}_{50}q_{31}}\right)$$

$$S \underset{aprox}{\rightarrow} N\left(400 \cdot 0.77969; \sigma = \sqrt{400 \cdot 0.77969 \cdot 0.22031}\right)$$

$$S \underset{aprox}{\rightarrow} N\left(311.876; \sigma = 8.2891\right)$$

Y por lo tanto C resultará también ser normal con media 12000000+(20000×311, 876)
Y desviación típica 20000×8.2891 es decir:

$$C \rightarrow N(18237520; \sigma = 165782)$$

En consecuencia la probabilidad P(C>R+K)=0.1
Se puede rescribir como:

P(C-R>K)=0.1

(C-R)$\rightarrow$N(18237520-18517200;;σ=165782) ≡ N(-279680;; σ=165782) de modo que

K=$Z_{0.1}$×165782-279680= 1.28×165782-279680=-67479.04 €

Es decir podemos sustraer -67479.04 € de la cantidad recaudada incurriendo en un riesgo del 10

4.- Una persona de la generación de 1975 de 40 años contrata un seguro tal que abonará la aseguradora 10000 euros en caso de fallecimiento antes de 70 años y en caso de que los cumpliera abonaría 15000. Determinar la prima si se utilizan tablas recargadas al 3%(garantía 0,97 %) . Tomar l_0=1.000.000

$$\boxed{\pi = 10000 \cdot {}_{30}q_{40}^{-} + 15000 \cdot {}_{30}p_{40}^{+}}$$ Con : $$\boxed{{}_{30}q_{40}^{-} = 1 - \frac{l_{70}^{-}}{l_{40}^{-}} \qquad {}_{30}p_{70}^{+} = \frac{l_{70}^{+}}{l_{40}^{+}}}$$

y :
$$l_x^{-} = l_0 \cdot {}_xp_0 - z_\alpha \sqrt{l_0 \cdot {}_xp_0 \cdot {}_xq_0} \qquad l_x^{+} = l_0 \cdot {}_xp_0 + z_\alpha \sqrt{l_0 \cdot {}_xp_0 \cdot {}_xq_0}$$
$${}_xp_0 = {}_{40}p_0 = \frac{969032}{1000000} = 0,969032 \rightarrow {}_{40}q_0 = 1 - 0,969032 = 0,030968$$
$${}_xp_0 = {}_{70}p_0 = \frac{880245}{1000000} = 0,880245 \rightarrow {}_{70}q_0 = 1 - 0,880245 = 0,119755$$

Que con los valores de $\alpha = 0.03 \rightarrow z_\alpha = 1.833$ y $l_0 = 1.000.000$ tendremos:

$$l_{40}^{-} = 1000000 \cdot 0.969032 - 1.833\sqrt{1000000 \cdot 0.969032 \cdot 0.030968} = 968706,32$$
$$l_{70}^{-} = 1000000 \cdot 0.880245 - 1.833\sqrt{1000000 \cdot 0.880245 \cdot 0.119755} = 879634,6$$

$$l_{40}^{+} = 1000000 \cdot 0.969032 + 1.833\sqrt{1000000 \cdot 0.969032 \cdot 0.030968} = 969357,67$$
$$l_{70}^{+} = 1000000 \cdot 0.880245 + 1.833\sqrt{1000000 \cdot 0.761386 \cdot 0.119755} = 880855,35$$

De forma que :

$$\boxed{{}_{30}q_{40}^{-} = 1 - \frac{879634,6}{968706,32} = 0.0919 \qquad {}_{30}p_{40}^{+} = \frac{880855,38}{969357,67} = 0.9087}$$

Y la prima (sin actualizar) sería:

$$\boxed{\pi = 10000 \cdot {}_{30}q_{40}^{-} + 15000 \cdot {}_{30}p_{40}^{+} = 10000 \cdot 0,0919 + 150000 \cdot 0,9087 = 14549,5}$$

5.- (Ayuso et al. 2.17) Dadas dos personas de edad x ; sabiendo que la probabilidad de que el último superviviente sobreviva más de n años es siete veces la probabilidad de supervivencia conjunta n años , calcular ${}_nq_x$.

$${}_np_{\overline{xx}} = 7\,{}_np_{xx} \qquad \Rightarrow (1 - ({}_nq_x)^2) = 7({}_np_x)^2 \quad \Rightarrow$$
$$1 - (1 - {}_np_x)^2 = 7({}_np_x)^2 \quad \Rightarrow$$
$$1 - 1 + 2 \cdot ({}_np_x) - ({}_np_x)^2 = 7({}_np_x)^2 \quad \Rightarrow 8({}_np_x)^2 - 2({}_np_x) = 0$$

cuyas soluciones son ${}_np_x = 0$ y ${}_np_x = \frac{1}{4}$ de forma que : ${}_nq_x = 1 - {}_np_x = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

6.- (Ayuso et al. 2.16) Dos personas de edad x e y (x<y) obtener ${}_np_x$ y ${}_np_y$ sabiendo que la probabilidad de que el grupo se extinga en n años es 0.075 y que exactamente uno de los dos viva n años tiene una probabilidad de 0.4

${}_{n}q_{\overline{xy}} = 0.075 \quad \Rightarrow {}_{n}q_{x} \cdot {}_{n}q_{y} = 0.075 \Rightarrow (1 - {}_{n}p_{x})(1 - {}_{n}p_{y}) = 0.75 \Rightarrow$

$1 - {}_{n}p_{x} - {}_{n}p_{y} + {}_{n}p_{x} \cdot {}_{n}p_{y} = 0.075$ y, por otro lado:

${}_{\mathrm{n}}p_{xy}^{[1]} = 0.4 \Rightarrow {}_{n}p_{x} \cdot {}_{n}q_{y} + {}_{n}p_{y} \cdot {}_{n}q_{x} = 0.4 \Rightarrow {}_{n}p_{x}(1 - {}_{n}p_{y}) + {}_{n}p_{y}(1 - {}_{n}p_{x}) = 0.4 \Rightarrow$

${}_{n}p_{x} + {}_{n}p_{y} - 2 \cdot {}_{n}p_{x} \cdot {}_{n}p_{y} = 0.4$

$$\left.\begin{array}{l} 1 - {}_{n}p_{x} - {}_{n}p_{y} + {}_{n}p_{x} \cdot {}_{n}p_{y} = 0.075 \\ {}_{n}p_{x} + {}_{n}p_{y} - 2 \cdot {}_{n}p_{x} \cdot {}_{n}p_{y} = 0.4 \end{array}\right\} \text{sumándolas} \rightarrow 1 - {}_{n}p_{x} \cdot {}_{n}p_{y} = 0.475 \rightarrow {}_{n}p_{x} = \frac{0.525}{{}_{n}p_{y}}$$

Y sustituyendo en la primera ecuación se obtiene:

$\left({}_{n}p_{y}\right)^{2} - 1.45\,{}_{n}p_{y} + 0.525 = 0 \rightarrow$ cuyas soluciones son ${}_{n}p_{y} = 0.75$ y ${}_{n}p_{y} = 0.7$

Preferimos la segunda para que se cumpla la condición x<y (mayor prob. de superv. para x)

7.-(Ayuso et al. 2.19) Sabiendo que ${}_{20}q_{60}$ =0.512 y que ${}_{20}p_{70}$ =0.151 ¿cuál es la probabilidad de que dados dos individuos de 60 y 70 años, en los próximos 20 años muere exactamente uno de ellos?

${}_{20}p_{60} \cdot {}_{20}q_{70} + {}_{20}p_{70} \cdot {}_{20}q_{60} = (1 - 0.512) \cdot (1 - 0.151) + 0.512 \cdot 0.151 = 0.49162$

8.- (Ayuso et al. 2.21) Sabiendo que : ${}_{40}p_{20}$ =0.8 y que ${}_{50}p_{20}$=0.6 . Dadas dos personas de 20 ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna de las fallezca entre los 60 y los 70 años?

$\left(1 - {}_{40/10}q_{20}\right)^{2} = \left(1 - ({}_{40}p_{20} - {}_{50}p_{20})\right)^{2} = (1 - (0.8 - 0.6))^{2} = 0.64$