

Distribución **NORMAL**

Errores/medidas/ Teoremas Límite . Continua, Obviamente

Desde menos infinito a más infinito

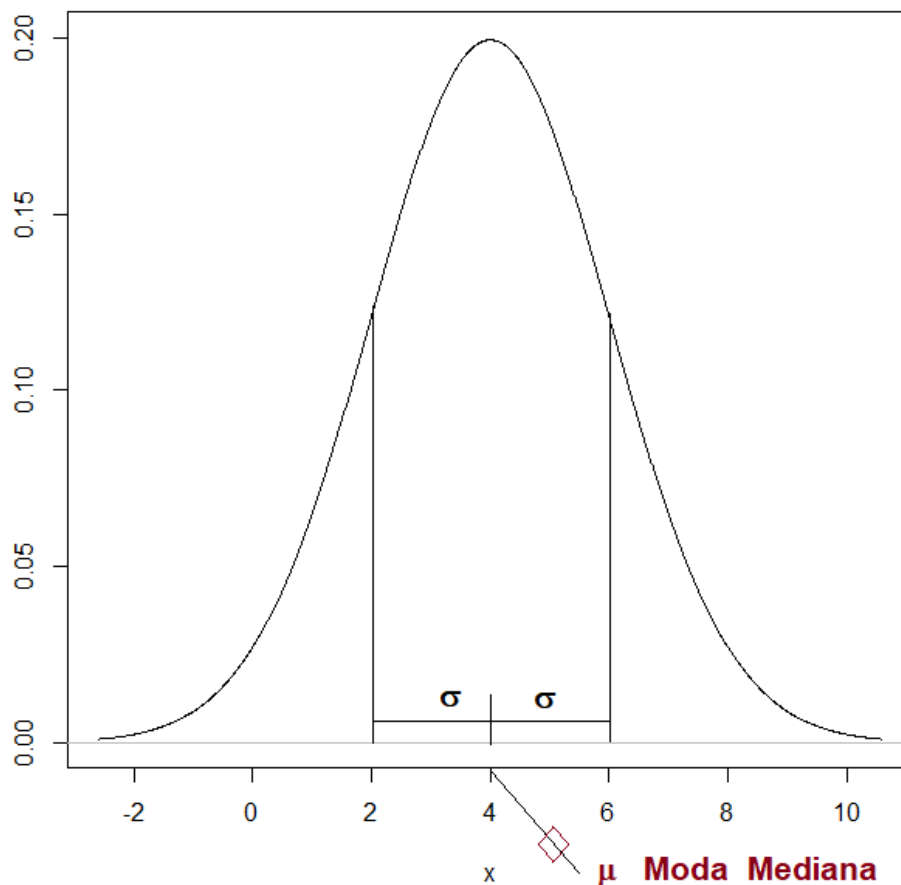
$$X \rightarrow N[\mu, \sigma]$$

Que son parámetros que habrá que estimar de la muestra.

Función de densidad $f(x) = \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ simétrica

Gráficamente la $N[4,2]$ será

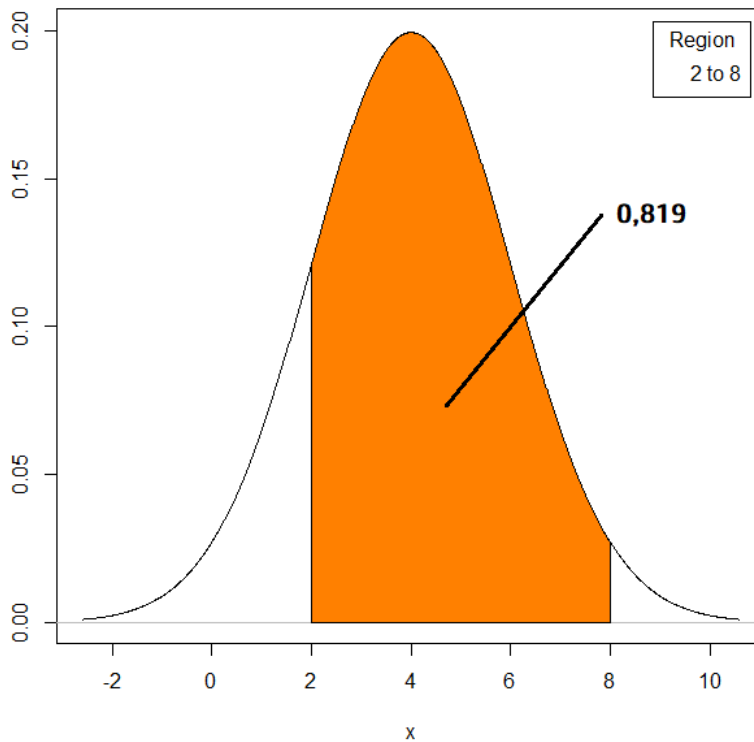
Normal Distribution: Mean=4, Standard deviation=2



Calcular probabilidades en $N[4,2]$

$$P(2 < x < 8) = \int_2^8 \frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} dx = \int_2^8 \frac{e^{-\frac{(x-4)^2}{2 \cdot 2^2}}}{2\sqrt{2\pi}} dx = 0,819$$

Normal Distribution: Mean=4, Standard deviation=2



Integral laboriosa / algoritmos / programas/Caest

Utilizar NORMAL TIPIFICADA –Tabla

$$Z \rightarrow N[0,1]$$

Su función de densidad es

$$f(z) = \frac{e^{-\frac{(z-0)^2}{2 \cdot 1^2}}}{1 \cdot \sqrt{2\pi}} = \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \text{ evidentemente más fácil}$$

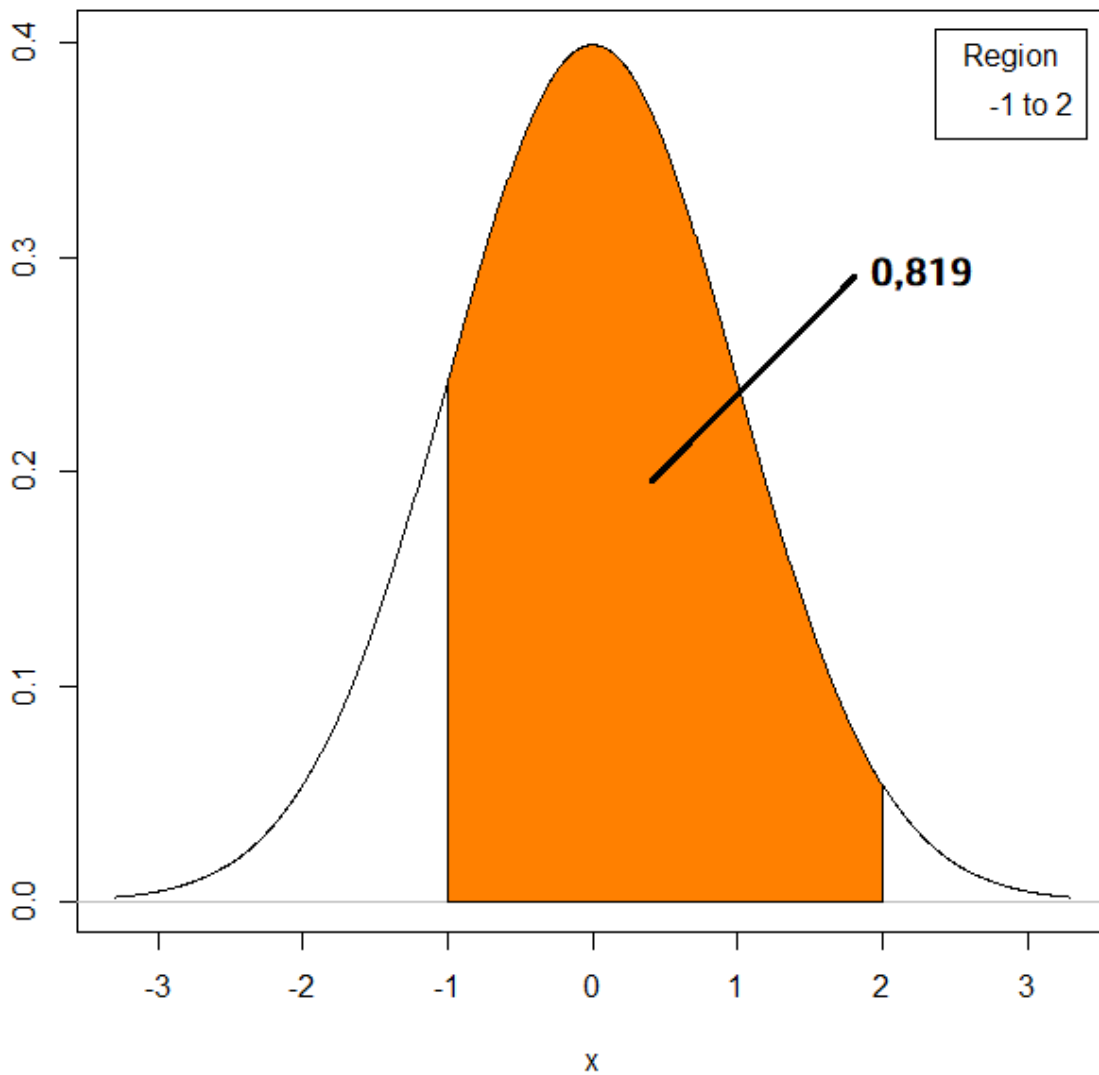
Otra vez: Calcular probabilidades en $N[4,2]$ tipificando

$$t_1 = \frac{\text{valor} - \text{media}}{\text{desv. típica}} = \frac{2 - 4}{2} = -1$$

$$t_2 = \frac{\text{valor} - \text{media}}{\text{desv. típica}} = \frac{8 - 4}{2} = 2$$

$$P(2 < x < 8) = P(t_1 < z < t_2) = P(-1 < Z < 2) = 0,819$$

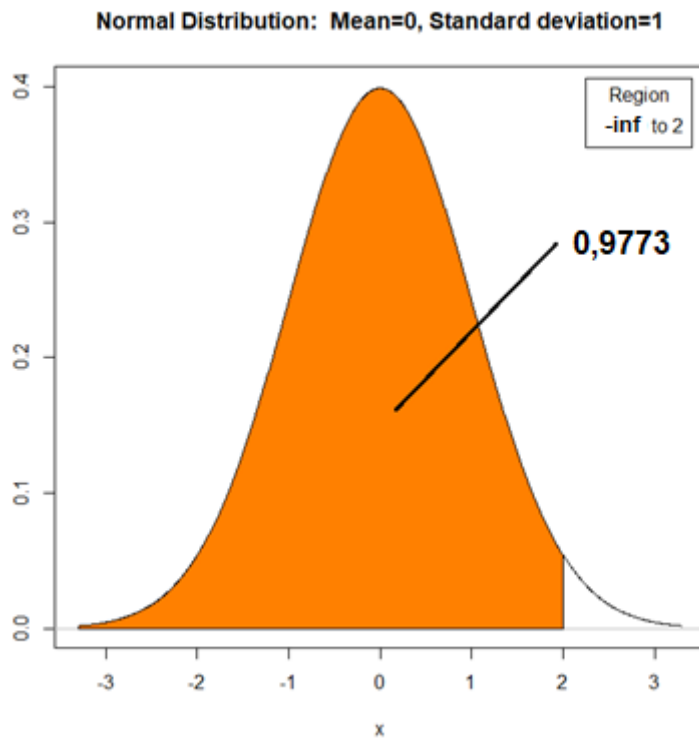
Normal Distribution: Mean=0, Standard deviation=1



¿ Como calcular ese 0,819?. Algoritmo (Beasley Springer 2000), Programas/
TABLAS

Las tablas sólo dan $F(X)$ = probabilidad acumulada hasta un determinado valor , y sólo para valores positivos . Hemos de trabajar con “simetrías” Ejemplo anterior

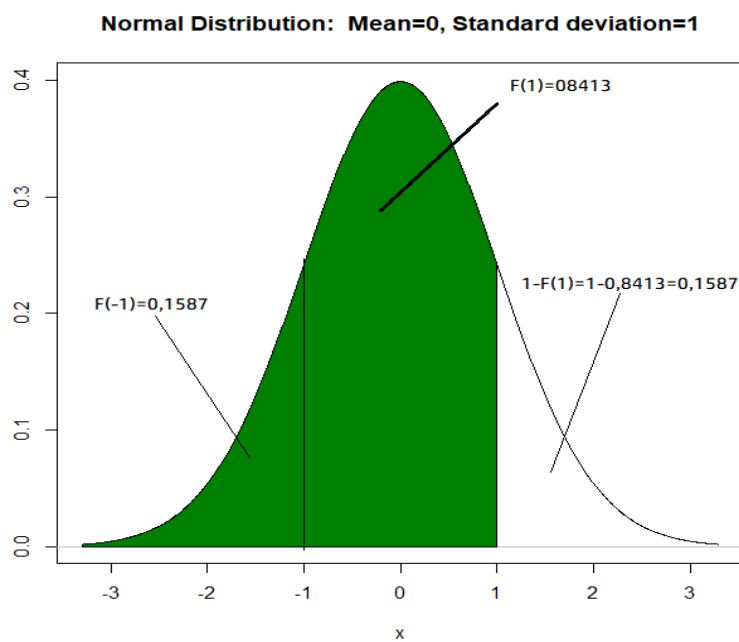
$$P(2 < x < 8) = P(t_1 < z < t_2) = P(-1 < Z < 2) \\ = F(2) - [1 - F(1)]$$



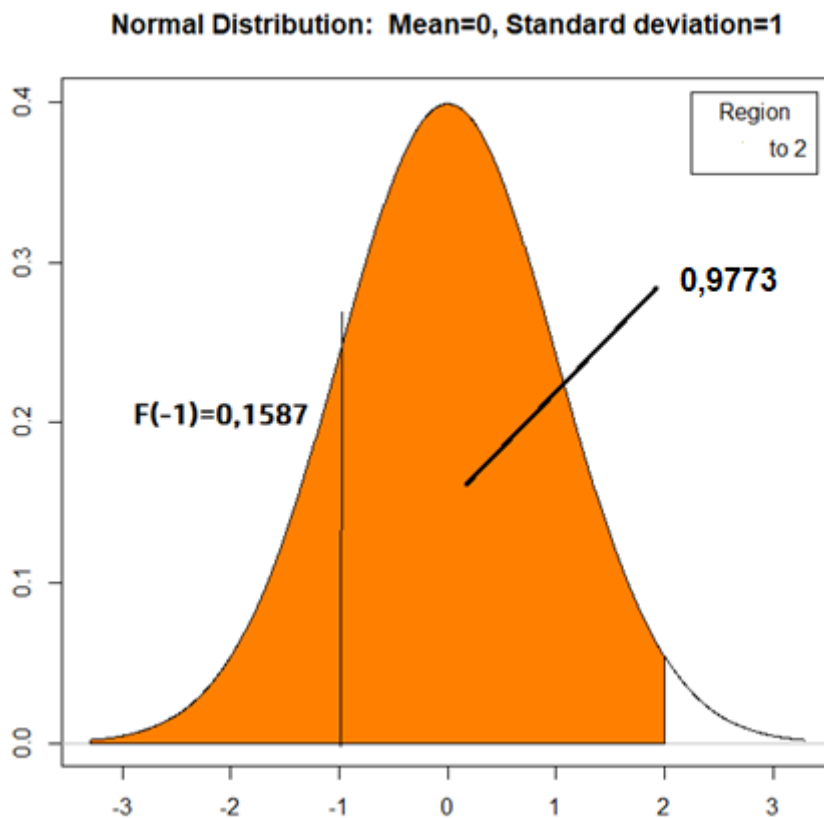
$F(2)$ según tabla es 0,9773

Para que fuera el resultado deseado debiéramos restar $F(-1)$ que no está en tablas(no hay números negativos) . Lo hallamos por simetría

Así.



Después restando



$$P(2 < x < 8) = P(t_1 < z < t_2) = P(-1 < Z < 2) = F(2) - [1 - F(1)] = 0,9773 - (1 - 0,8413) = 0,9773 - 0,1587 = 0,819$$

Teorema Fundamental Distribuciones Normales

Si $X \rightarrow N[\mu_x; \sigma_x]$ e $Y \rightarrow N[\mu_y; \sigma_y]$ X e Y **Independientes**

$Z = Ax + By + C$ combinación lineal

$$\text{entonces } Z \rightarrow N[A\mu_x + B\mu_y + C ; \sqrt{A^2\sigma_x^2 + B^2\sigma_y^2}]$$

Z sigue una Normal con Media combinación lineal de las medias y Desviación Típica la raíz cuadrada de la combinación lineal de las varianzas con los coeficientes que las acompañan al cuadrado

Ejemplo:

$$X \rightarrow N[2; 2] \quad e \quad Y \rightarrow N[4; 3]$$

$$Z=4x-3y+4 \quad ¿P(Z>1)?$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow N \left[A\mu_x + B\mu_y + C ; \sqrt{A^2\sigma_x^2 + B^2\sigma_y^2} \right] \\ &= \left[(4 \cdot 2) - (3 \cdot 4) + 4 ; \sqrt{(16 \cdot 2) + (9 \cdot 3)} \right] \\ &= N[0; 12,04] \end{aligned}$$

$$P(Z > 1) = P\left(t > \frac{1-0}{12,04}\right) = P(t > 0,083) = 1 - F(0,083) = 1 - 0,5319 = 0,468$$

Teorema Fundamental Distribuciones Normales

Si $X \rightarrow N[\mu_x; \sigma_x]$ e $Y \rightarrow N[\mu_y; \sigma_y]$ X e Y **NO Independientes luego existe covarianza x e y $\sigma_{x,y}$**

$Z=Ax+By+C$ combinación lineal

$$\text{entonces } Z \rightarrow N \left[A\mu_x + B\mu_y + C ; \sqrt{A^2\sigma_x^2 + B^2\sigma_y^2 + 2 \cdot A \cdot B \cdot \sigma_{x,y}} \right]$$

ejemplo Dos normales X e Y tales que:

$$\vec{m} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\text{Siendo } z=3x+2y+0 \quad ¿P(Z<15)?$$

$$Z \rightarrow N \left[A\mu_x + B\mu_y + C ; \sqrt{A^2\sigma_x^2 + B^2\sigma_y^2 + 2 \cdot A \cdot B \cdot \sigma_{x,y}} \right] =$$

$$Z \rightarrow N \left[3 \cdot 2 + 2 \cdot 4 ; \sqrt{9 \cdot 4 + 4 \cdot 6 + 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3} \right] = N[14; 9,79]$$

$$P(Z < 15) = P\left(t < \frac{15-14}{9,79}\right) = P(t < 0,1) = F(0,1) = 0,5398$$