Actuarianos Anexo (Comprobación de resultados para 2 y 3 cabezas)

Se trata de comprobar para 2 y 3 cabezas que :

Supervivencia conjunta: ${}_n p_{x_1 x_2 \ldots x_m} = Z^m$

Disolución: ${}_n q_{x_1 x_2 \ldots x_m} = 1 - Z^m$

Extinción: ${}_n q_{\overline{x_1 x_2 \ldots x_m}} = \dfrac{1}{1+Z}$

No extinción: ${}_n p_{\overline{x_1 x_2 \ldots x_m}} = \dfrac{Z}{1+Z}$

Supervivencia de al menos r personas: ${}_n p^{r}_{\overline{x_1 x_2 \ldots x_m}} = \dfrac{Z^r}{(1+Z)^r}$

Supervivencia de exactamente r personas: ${}_n p^{[r]}_{\overline{x_1 x_2 \ldots x_m}} = \dfrac{Z^r}{(1+Z)^{r+1}}$

Para el caso de dos cabezas. Consideremos las probabilidades temporales a n años.
Los actuarianos para las edades x e y serían:

$$\boxed{\begin{aligned} Z^0 &= 1 \\ Z^1 &= {}_n p_x + {}_n p_y \\ Z^2 &= {}_n p_x \cdot {}_n p_y \end{aligned}}$$

De forma que tendríamos que :

La probabilidad de supervivencia conjunta:

$${}_n p_{xy} = {}_n p_x \cdot {}_n p_y = Z^2$$

La probabilidad de disolución:

$${}_n q_{xy} = 1 - {}_n p_{xy} = 1 - \left({}_n p_x \cdot {}_n p_y \right) = 1 - Z^2$$

La probabilidad de extinción (probabilidad de que sobrevivan exactamente 0):

$${}_n q_{\overline{xy}} = {}_n q_x \cdot {}_n q_y = \left(1 - {}_n p_x\right)\left(1 - {}_n p_y\right) = 1 - {}_n p_x - {}_n p_y + {}_n p_x \cdot {}_n p_y = 1 - Z^1 + Z^2 = \frac{1}{1+Z}$$

La probabilidad de no extinción (al menos uno sobrevive):

$${}_n p_{\overline{xy}} = 1 - {}_n q_{\overline{xy}} = 1 - {}_n\left(q_x \cdot {}_n q_y\right) = 1 - \left(\left(1 - {}_n p_x\right)\left(1 - {}_n p_y\right)\right) =$$

$$1 - \left(1 - {}_n p_x - {}_n p_y + {}_n p_x \cdot {}_n p_y\right) = Z^1 - Z^2 = \frac{Z}{1+Z} =$$

La probabilidad de que sobreviva 1 (exactamente 1):

$${}_n p^{[1]}_{\overline{xy}} = {}_n p_x \cdot {}_n q_y + {}_n q_x \cdot {}_n p_y = {}_n p_x (1 - {}_n p_y) + {}_n p_y (1 - {}_n p_x) = {}_n p_x + {}_n p_y - 2 \cdot {}_n p_x \, {}_n p_y =$$

$$= Z^1 - 2Z^2 = \frac{Z}{(1+Z)^2}$$

Para el caso de tres cabezas.

Consideremos las probabilidades temporales a n años.
Los actuarianos para las edades x , y , z serían:

$$\boxed{\begin{array}{l} Z^0 = 1 \\ Z^1 = {}_n p_x + {}_n p_y + {}_n p_z \\ Z^2 = {}_n p_x \cdot {}_n p_y + {}_n p_x \cdot {}_n p_z + {}_n p_y \cdot {}_n p_z \\ Z^3 = {}_n p_x \cdot {}_n p_y \cdot {}_n p_z \end{array}}$$

Probabilidad de supervivencia conjunta:

$$ {}_n p_{xyz} = {}_n p_x \cdot {}_n p_y \cdot {}_n p_z = Z^3 $$

Probabilidad de disolución:

$$ {}_n q_{xyz} = 1 - {}_n p_{xyz} = 1 - \left({}_n p_x \cdot {}_n p_y \cdot {}_n p_z \right) = 1 - Z^3 $$

Probabilidad de extinción (sobrevivan exactamente 0):

$$ \begin{aligned} {}_n q_{\overline{xyz}} &= {}_n q_x \cdot {}_n q_y \cdot {}_n q_z = \left(1 - {}_n p_x\right)\left(1 - {}_n p_y\right)\left(1 - {}_n p_z\right) = \\ &= 1 - {}_n p_x - {}_n p_y - {}_n p_z + {}_n p_x \cdot {}_n p_y + {}_n p_x \cdot {}_n p_z + {}_n p_y \cdot {}_n p_z - {}_n p_x \cdot {}_n p_y \, {}_n p_z = \\ &= 1 - Z^1 + Z^2 - Z^3 = \frac{1}{1+Z} \end{aligned} $$

La probabilidad de no extinción (al menos uno sobrevive):

$$ \begin{aligned} {}_n p_{\overline{xyz}} &= 1 - {}_n q_{\overline{xyz}} = 1 - \left({}_n q_x \cdot {}_n q_y \cdot {}_n q_z \right) = 1 - \left(\left(1 - {}_n p_x\right)\left(1 - {}_n p_y\right)\left(1 - {}_n p_z\right) \right) = \\ &= 1 - \left(1 - {}_n p_x - {}_n p_y - {}_n p_z + {}_n p_x \cdot {}_n p_y + {}_n p_x \cdot {}_n p_z + {}_n p_y \cdot {}_n p_z - {}_n p_x \cdot {}_n p_y \, {}_n p_z \right) = \\ &= Z^1 - Z^2 + Z^3 = \frac{Z}{1+Z} \end{aligned} $$

La probabilidad de que sobrevive exactamente uno :

$$ {}_n p_{xyz}^{[1]} = {}_n p_x \cdot {}_n q_y \cdot {}_n q_z + {}_n q_x \cdot {}_n p_y \cdot {}_n q_z + {}_n q_x \cdot {}_n q_y \cdot {}_n p_z = $$

$$ = {}_n p_x \cdot \left(1 - {}_n p_y\right) \cdot \left(1 - {}_n p_z\right) + \left(1 - {}_n p_x\right) \cdot {}_n p_y \cdot \left(1 - {}_n p_z\right) + \left(1 - {}_n p_x\right) \cdot \left(1 - {}_n p_y\right) \cdot {}_n p_z = $$

$$ = {}_n p_x - {}_n p_x \cdot {}_n p_y - {}_n p_x \cdot {}_n p_z + {}_n p_x \cdot {}_n p_y \cdot {}_n p_z + $$

$$ + {}_n p_y - {}_n p_x \cdot {}_n p_y - {}_n p_y \cdot {}_n p_z + {}_n p_x \cdot {}_n p_y \cdot {}_n p_z + $$

$$ + {}_n p_z - {}_n p_x \cdot {}_n p_z - {}_n p_y \cdot {}_n p_z + {}_n p_x \cdot {}_n p_y \cdot {}_n p_z = $$

$$ = Z^1 - 2Z^2 + 3Z^3 = \frac{Z}{(1+Z)^2} $$

La probabilidad de que sobrevivan al menos dos:

$$ {}_n p_{xyz}^{2} = {}_n p_x \cdot {}_n p_y \cdot {}_n q_z + {}_n q_x \cdot {}_n p_y \cdot {}_n p_z + {}_n p_x \cdot {}_n q_y \cdot {}_n p_z + {}_n p_x \cdot {}_n p_y \cdot {}_n p_z = $$

$$ = {}_n p_x \cdot {}_n p_y \cdot \left(1 - {}_n p_z\right) + \left(1 - {}_n p_x\right) \cdot {}_n p_y \cdot {}_n p_z + {}_n p_x \cdot \left(1 - {}_n p_y\right) \cdot {}_n p_z + {}_n p_x \cdot {}_n p_y \cdot {}_n p_z = $$

$$ = {}_n p_x \cdot {}_n p_y + {}_n p_y \cdot {}_n p_z + {}_n p_x \cdot {}_n p_z - 2 . {}_n p_x \cdot {}_n p_y \cdot {}_n p_z = Z^2 - 2Z^3 = \frac{Z^2}{(1+Z)^2} $$

La probabilidad de que sobrevivan exactamente dos:

$$ {}_n p_{xyz}^{[2]} = {}_n p_x \cdot {}_n p_y \cdot {}_n q_z + {}_n q_x \cdot {}_n p_y \cdot {}_n p_z + {}_n p_x \cdot {}_n q_y \cdot {}_n p_z = $$

$$ = {}_n p_x \cdot {}_n p_y \cdot \left(1 - {}_n p_z\right) + \left(1 - {}_n p_x\right) \cdot {}_n p_y \cdot {}_n p_z + {}_n p_x \cdot \left(1 - {}_n p_y\right) \cdot {}_n p_z = $$

$$ = {}_n p_x \cdot {}_n p_y + {}_n p_x \cdot {}_n p_z + {}_n p_y \cdot {}_n p_z - 3 . {}_n p_x \cdot {}_n p_y \cdot {}_n p_z = $$

$$ = Z^2 - 3Z^3 = \frac{Z^2}{(1+Z)^3} $$