TEMA 3: La Tabla de mortalidad: La mortalidad como fenómeno discreto.

- Independencia, homogeneidad, estacionariedad.
- La tabla de mortalidad y sus elementos.
- Relación entre los elementos de una tabla de mortalidad.
- Tipos de seguro: Cálculo de probabilidades.
- Probabilidades para una cabeza.
- Probabilidades para más de una cabeza.
- Actuarianos.

::

En este tema nos aproximaremos al instrumento básico para la explotación estadística de la información biométrica de utilidad en el cálculo actuarial: las **tablas de mortalidad** (Life tables,)

Estas tablas recogen la información básica útil para poder calcular las probabilidades de muerte y de supervivencia necesarias para determinar primas, reservas, provisiones etc. en los seguros de vida.

La medición de la mortalidad – la variable más relevante en este contexto – precisa de cierto nivel de objetividad, con lo que el actuario debe estudiar las tasas de mortalidad registradas en el pasado en el colectivo al que pertenecen los asegurados (**población de riesgo**) a fin de poder *predecir o estimar* de la forma más *objetiva* posible el número de años de vida que resta a cada asegurado.

La forma más habitual de medir la mortalidad es como ratio referida a un colectivo y a un período: por ejemplo, si en un año determinado en una población de 350.221 personas han muerto 671 diremos que la tasa de mortalidad de ese año es del 1,916 por mil 0,001916

Esta información es, sin embargo, poco útil como aproximación a la probabilidad de muerte de un individuo de esa población ya que, por ejemplo, no parece razonable suponer iguales la probabilidad para un varón de 80 años la de una mujer de 45, p.ej.. La *especificación* de, al menos el sexo y la edad, se hace necesaria en los datos que las tablas deben recoger.

Las ratios de mortalidad pueden entonces ser clasificadas como *generales* o *específicas*. Las primeras vendrán referidas a toda la población y englobarán todas las causas de muerte, mientras las segundas se emplearán para causas especiales de muerte o para grupos o cohortes específicos de la población, e incluso para combinaciones de ambos elementos.

(periodificación y generación // estandarización) A partir de los datos de la población por edades y de los fallecimientos en muchas ocasiones será necesario realizar algunos procedimientos de estandarización de éstos para descontar los efectos de una estructura poblacional por edades “atípica” y también serie necesario realizar algunas operaciones para periodificar los datos de la tabla a una determinada fecha y/o a una determinada generación (grupo de personas que comparte el año de nacimiento.

Habitualmente, la tabla de mortalidad recogerá, para una determinada población (general o de riesgo), las tasas de mortalidad (y/o) de supervivencia, a cada edad y para cada sexo. O bien la evolución del número de supervivientes por edades y sexos a partir de un grupo inicial de cierto tamaño. O bien ambos tipos de información, pudiendo aparecer otros indicadores como por ejemplo la esperanza de vida:

Tabla de mortalidad para la provincia de Valencia en el año 2009 : Fuente I.N.E. (www.ine.es)

	Tasa de mortalidad		Supervivientes		Población estacionaria		Esperanza de vida	
	Varones	Mujeres	Varones	Mujeres	Varones	Mujeres	Varones	Mujeres
2009								
Valencia								
0	3,205384	2,480103	100000	100000	99729,757	99779,907	77,857956	83,858839
1	0,190562	0,073263	99680,328	99752,536	398530,21	398929,64	77,107148	83,066601
5	0,061821	0,033395	99604,383	99723,309	497941,4	498576,01	73,164808	79,090581
10	0,154273	0,073497	99573,6	99706,659	497708,51	498488,88	68,18669	74,103359
15	0,317075	0,15509	99496,817	99670,021	497214,75	498144,47	63,237055	69,129207
20	0,396914	0,336721	99339,162	99592,764	496219,71	497513,84	58,332191	64,181018
25	0,556166	0,257013	99142,205	99425,24	494947,1	496816,73	53,442943	59,28526
30	0,689355	0,261285	98866,933	99297,552	493581,23	496243,73	48,585548	54,358183
35	0,976444	0,549583	98526,68	99167,891	491606,16	495152,42	43,743714	49,425179
40	1,573119	0,732586	98046,654	98895,764	488533,99	493590,85	38,943876	44,554368
45	3,381977	1,614248	97278,132	98534,166	482863,02	490872,44	34,22951	39,708536
50	5,222622	2,173815	95645,1	97741,776	472500,2	486184,66	29,765453	35,008316
55	8,026874	3,314019	93177,41	96684,9	457225,27	479708,95	25,482781	30,362449
60	11,065901	4,239461	89507,321	95095,136	435847,38	470904,83	21,419413	25,825521
65	17,31882	6,768398	84684,277	93098,753	406906	458267,73	17,492585	21,321194
70	28,116962	11,728	77637,145	89997,014	364113,21	438914,16	13,839263	16,963994
75	48,832734	25,228095	67399,388	84849,429	302824,47	401280,07	10,539082	12,820295
80	87,27372	55,271898	52611,641	74725,897	216723,2	331178,36	7,745495	9,187104
85	141,53238	114,76133	33697,401	56421,041	123537,76	219565,72	5,661564	6,297939
90	225,53819	201,90549	16212,807	31223,387	49871,15	101290,89	4,147477	4,34836
95	285,81734	312,42204	4964,9579	10772,201	17371,087	34479,647	3,498738	3,200799

Hipótesis fundamentales sobre el fenómeno biométrico

Es importante reseñar que cuando se hace referencia al tiempo biométrico se está admitiendo implícitamente la ***estacionariedad*** del fenómeno de la supervivencia. En efecto, al admitir que el hecho relevante para determinar la probabilidad de muerte o supervivencia de un individuo es su edad, sin atender al momento físico en que se ha alcanzado tal edad, se está suponiendo que estas probabilidades no evolucionan y son temporalmente estacionarias, es decir, son independientes de la fecha del calendario en que se consideren. Obviamente, la acumulación histórica de información estadística contradice este supuesto cuando se analizan periodos relativamente largos de tiempo, en los que se ha observado que las pautas de comportamiento biométrico de las poblaciones evolucionan, por lo que, el supuesto de estacionariedad sólo podrá ser aceptado cuando se trabaje con periodos de tiempo no muy dilatados.

El supuesto de estacionariedad no es la única hipótesis implícita que se estaría asumiendo con la argumentación anterior. En efecto, dado que se atiende a la edad como única variable relevante para determinar las distintas probabilidades, se está presumiendo, también, de modo implícito la ***homogeneidad*** de los individuos. Así es, al suponer que los individuos de una misma edad están sometidos a idénticos riesgos de fallecimiento se está admitiendo tácitamente que el comportamiento probabilístico ante la mortalidad de todos los sujetos de igual edad es idéntico, por lo que todos ellos poseerán distribuciones de probabilidad similares, de manera que sería suficiente conocer la de uno de ellos para poder establecer conclusiones sobre la generalidad del colectivo.

Finalmente, es preciso destacar que además de las dos hipótesis anteriores cuando se trabaja con las funciones de supervivencia y fallecimiento se suele realizar una suposición adicional como es la de ***independencia***. En efecto, se admite que las edades de fallecimiento, y, por tanto, las probabilidades de supervivencia y muerte a que están sometidos los distintos individuos, son independientes, es decir, el hecho de que un individuo muera o sobreviva a determinada edad es independiente de lo que ocurra con cualquier otro sujeto en esa o en otra edad. Esta hipótesis, por otro lado nada descabellada, simplifica notablemente los cálculos cuando se trabaja con probabilidades para más de una cabeza.

Componentes de una tabla de mortalidad: La tabla de Mortalidad elementos y relaciones

La información que puede aparecer en una tabla de mortalidad , con su expresión simbólica y su definición operativa es:

Edad	x	años cumplidos	
Supervivientes	l_x	número de individuos que alcanzan la edad x, procedentes de una colectividad de individuos de edad 0	
Defunciones	d_x	número de individuos de edad x que mueren sin alcanzar la edad x+1	$\boxed{l_x = l_{x+1} + d_x}$
Tanto (anual) de supervivencia (a la edad x)	p_x	Proporción de los individuos de edad x individuos que alcanzan la edad x+1 tras un año	$\boxed{p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}}$
Tanto (anual) de mortalidad (a la edad x)	q_x	Proporción de defunciones que se producen entre x y x+1 entre los individuos de edad x.	$\boxed{q_x = \frac{d_x}{l_x} = 1 - p_x}$
Población censal de edad x	L_x	Número medio de personas vivas entre x y x+1 años. O,	$L_x = \int_0^1 l_{x+t} dt$ Supuesta uniformidad en la distribución anual de d:

		alternativamente, número medio de años vividos por toda la población l_x del año x hasta el x+1.	$\boxed{L_x = \frac{l_x + l_{x+1}}{2} = \frac{l_x + l_x - d_x}{2} = l_x - \frac{1}{2} d_x}$
tasa de mortalidad media entre la edad x ý x+1	m_x	el riesgo medio al que está sujeto la población durante su tránsito entre los x y x+1 años y es diferente de q_x que representa el efecto total de la mortalidad en términos de proporción de defunción en el conjunto del año, sin hacer referencia a la variación del riesgo de fallecimiento a lo largo del año.	
esperanza de vida a la edad x.	e^0_x	Número medio de años que les resta por vivir a los (l_x) supervivientes en x	$e^0_x = \sum_{k=x}^{\omega} \frac{L_k}{l_x}$ $\left[\text{s/uniformidad } e^0_x = 0.5 + \sum_{k=x}^{\omega} \frac{l_k}{l_x} \right]$ (ω = infinito actuarial = edad límite de la población)
cantidad de existencia a la edad x	T_x	Número total de años por vivir para la totalidad de la cohorte a la edad x $\boxed{T_x = \sum_{k=x}^{\omega} L_k}$	
Tasa instantánea de mortalidad	μ_x	En el supuesto de continuidad del proceso será el cociente entre las defunciones ocurridas en un diferencial de tiempo y este diferencial $\mu_x = \frac{d_t q(x)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta_t q_x}{\Delta t} = \frac{\frac{l_x - l_{x+dt}}{l_x}}{dt} = \frac{-\frac{dl}{l}}{dt} = -d\frac{\ln(l)}{dt}$	

Ejemplo: Tabla de Mortalidad para de la generación de 1960 .

X	**l_x**	**q_x (tanto por mil)**	**p_x (tanto por mil)**	**d_x**	**e^0_x**
0	1000000	6,772075	993,22792	6772,07529	86,56
1	993227,925	0,656436	999,34356	651,990911	86,16
2	992575,934	0,343361	999,65663	340,8119	85,21
3	992235,122	0,299914	999,70008	297,585366	84,24
4	991937,537	0,249909	999,75009	247,894998	83,27
5	991689,642	0,238529	999,76147	236,547724	82,29
....	....	....	....	....	....
96	401441,73	114,0475	885,95242	45783,4562	3,37
97	355658,274	138,8659	861,13400	49388,8393	2,87
98	306269,434	169,5932	830,40673	51941,2321	2,42

Fuente: Elaboración propia a partir de la tabla PERM/F2000P (B.O.E. núm.244 de 11 Oct.2000)

Tipos de seguro: Cálculo de probabilidades.

Las modalidades de los seguros de vida pueden ser muy variadas y en función de cómo sean puede ser de interés estimar, no sólo las probabilidades de que un sujeto según su sexo y edad fallezca en un determinado momento, sino también estimar otras eventualidades de fenomenología temporal muy variada o que implique a varios sujetos.

Los seguros pueden agruparse en dos tipos principales: de fallecimiento y de supervivencia; pudiendo ser tanto temporales como de vida entera, inmediatos o diferidos, de cobro único o renta vitalicia, con cobro anticipado o vencido, de prima única o temporal, etc., así como, para un único individuo o para varios, pudiendo en este caso propiciarse multitud de combinaciones.

Por lo tanto puede interesar estimar probabilidades de muerte o de supervivencia, a lo largo de un intervalo temporal o durante toda la vida del asegurado. Puede interesar determinar una probabilidad diferida de muerte o en el caso de haber varios sujetos asegurados (varias cabezas) puede interesarnos calcular distintas probabilidades de varias combinaciones de eventos

Por ejemplo, un individuo de edad x contrata un seguro de vida para pagar una cantidad C a un beneficiario en caso de que fallezca entre una edad x+m y x+m+n. En este caso se trataría de un seguro de vida para el caso de *muerte*, *diferido* (pues protege el riesgo m años después de suscrito), *temporal* (pues el riesgo sólo está cubierto durante n años) y *de pago único* (se libera una cantidad C en el momento del fallecimiento):

Aquí nos interesaría determinar la probabilidad de que el individuo de edad x (varón o mujer, perteneciente a cierta generación, lo que nos lo encuadra en cierta tabla)fallezca entre la edad x+m y x+m+n:
Esta probabilidad se designa por : ${}_{m/n}q_x$

O, por ejemplo, un individuo de edad x suscribe una póliza, por la que debe hacer aportaciones anuales hasta la edad x+m -si vive hasta tal edad-, para cobrar una cantidad fija C al principio de cada año después de su x+m+n cumpleaños hasta su fallecimiento, si este no ocurre antes de cumplir tal edad. Estaríamos ante un seguro de vida de *supervivencia*, con *prima anual fraccionada* (las aportaciones son anuales desde la edad x hasta la x+m), *diferido* (pues el cobro comienza tras la edad x+m+n), *de renta vitalicia o de vida entera* (dado que se percibe la renta hasta el fallecimiento) y *de cobro anticipado* (la cantidad es percibida al inicio de cada año):

Aquí interesarían las probabilidades de alcanzar x+m+n y más años para determinar la valor esperado de la renta a pagar, y las probabilidades de que muera entre x y x+m+n para determinar igualmente el valor esperado de los ingresos.

Un ejemplo en el que está implicado más de un sujeto podría ser. Un individuo de edad x suscribe un seguro para que su cónyuge de edad x' reciba una cantidad anual C tras su fallecimiento y durante n años, salvo que el cónyuge fallezca antes de los n años siguientes al fallecimiento del individuo, para lo cual realizará aportaciones anuales hasta el momento de su fallecimiento o el de su cónyuge. Obsérvese que en este caso para el cónyuge tendríamos un seguro de vida de supervivencia (pues si no sobrevive no recibirá las compensaciones), de renta temporal y cobro anticipado, condicionado a la ocurrencia del fallecimiento del suscriptor.

Probabilidades para una cabeza.

Principales probabilidades implicadas para el caso de una cabeza asociadas con los distintos tipos de seguros y con la notación habitual es la siguiente:

Probabilidad temporal n años de supervivencia (n: número entero)

$_np_x$: representa la probabilidad de que un sujeto de edad actuarial x viva al menos n años más. Un caso particular ocurre cuando n=1, en que n se suele omitir, con lo que la probabilidad anterior se expresa mediante p_x, y se interpreta como la probabilidad de que un individuo de edad x alcance los x+1 años.

A partir de los datos de una tabla de mortalidad podría estimarse como: $\boxed{{}_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}}$

Probabilidad temporal de n años de fallecimiento (n: número entero)

$_nq_x$ ó $_{/n}q_x$: es la probabilidad de que un individuo con edad actuarial x fallezca antes de alcanzar la edad actuarial x+n. Cuando n=1, de nuevo, se suele notar la probabilidad anterior mediante q_x. Obviamente se verifica que: $_nq_x = 1 - {}_np_x$ y por lo tanto: $\boxed{{}_n q_x = 1 - {}_n p_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x}}$

Probabilidad diferida m años y temporal n años de fallecimiento:

$_{m/n}q_x$: representa la probabilidad de que un individuo de edad x alcance los x+m años y fallezca durante los n siguientes, es decir, fallezca entre la edad x+m y x+m+n. O sea, la probabilidad de fallecer durante un intervalo de n años diferida m años. De nuevo, si n=1, el coeficiente correspondiente se suele omitir y se nota la probabilidad de fallecimiento diferida anterior mediante: $_{m/}q_x$.

Donde, por ejemplo, $_{m-1/}q_x$ simbolizaría la probabilidad de que un individuo de edad x fallezca exactamente dentro del m-ésimo año.

Se puede obtener de la tabla de la siguiente manera : si consideramos que X es la variable : edad de fallecimiento en años; la probabilidad pedida se corresponderá con la probabilidad (condicionada) de que esta variable tome valores comprendidos entre x+m y x+m+n sabiendo que ha superado el valor x:

$$\boxed{\begin{aligned} {}_{m/n}q_x &= P\left((x+m < X \le x+m+n) \mid (X > x)\right) = \frac{P\left((x+m < X \le x+m+n) \cap (X > x)\right)}{P(X > x)} = \\ &\frac{P\left(x+m < X \le x+m+n\right)}{P(X > x)} = \frac{l_{x+m} - l_{x+m+n}}{l_x} \end{aligned}}$$

Probabilidades para más de una cabeza.

En muchas ocasiones los seguros están vinculados a varios sujetos (cabezas), como, por ejemplo, en el caso de un seguro de vida de supervivencia de un matrimonio en que se deberá satisfacer una cantidad monetaria siempre que sobreviva, al menos uno de los dos miembros de la pareja. Aparecen situaciones, por tanto, en que se hace necesario manejar y calcular probabilidades conjuntas referidas a más de una cabeza.

La hipótesis de independencia de los fenómenos biométricos permite calcular fácilmente todas las probabilidades sobre más de una cabeza a partir de las probabilidades de cada una de las cabezas que componen el grupo. Así, por ejemplo, para dos individuos de edades x e y, cuyas probabilidades respectivas de alcanzar las edades x+1 e y+1 sean p_x y p_y, se tendría que la probabilidad conjunta de que ambos sobreviviesen al cabo de un año sería $p_{xy} = p_x \cdot p_y$, donde p_{xy} simboliza tal probabilidad conjunta.

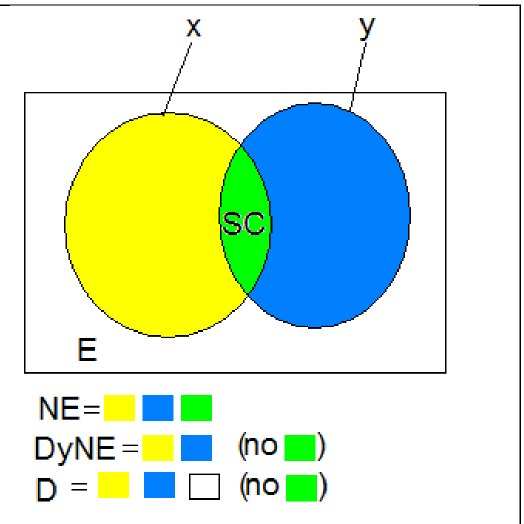
Según el caso interesará estudiar las probabilidades de distintas combinaciones de muerte/supervivencia individual entre estas consideraremos especialmente el caso de la **extinción** del grupo y el caso de su **disolución.**

Hablaremos de extinción cuando hayan desaparecido todos los miembros del grupo. (Se producirá, por tanto, cuando muera el último superviviente del grupo). En cambio, hablaremos de disolución, cuando desaparezca el primer integrante del grupo (primer fallecimiento)

<u>Caso de dos cabezas</u>: Consideramos un grupo de dos individuos de edades x e y, que abusando del lenguaje podemos llamar individuo x e individuo y.

Las situaciones combinadas posibles serían:

Probabilidad	**Notación**	**Situación**
Supervivencia conjunta (SC)	$_n p_{xy}$	Todos sobreviven
No extinción (NE)	$_n p_{\overline{xy}}$	Al menos uno sobrevive
Disolución y no extinción (DyNE)	$_n p_{\overline{xy}}^{[1]}$	Sobrevive exactamente uno
Extinción (E)	$_n q_{\overline{xy}}$	Ninguno sobrevive
Disolución (D)	$_n q_{xy}$	Al menos fallece uno



La situaciones anteriores se han considerado como probabilidades temporales es decir sobre el comportamiento de la pareja durante los próximos n años (Eventualmente n puede ser uno):

Tendríamos las siguientes *probabilidades temporales*

Probabilidad de supervivencia conjunta: Transcurridos n años, tanto el individuo x como el y sobreviven: se corresponde con la intersección, en verde , en el gráfico:

$$\boxed{{}_{\mathrm{n}}p_{xy} = {}_{\mathrm{n}}p_x \cdot {}_{\mathrm{n}}p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} \cdot \frac{l_{y+n}}{l_y}}$$

Probabilidad de no extinción: Transcurridos n años, algunos de los individuos sobrevive , se corresponde con la unión de los sucesos sobrevive x, sobrevive y, la zona encerrada dentro de alguno de los diagramas de Venn de colores azul, amarillo o verde en el gráfico:

$$\begin{aligned}
&{}_n p_{\overline{xy}} = {}_n p_x \cdot {}_n q_y + {}_n q_x \cdot {}_n p_y + {}_n p_x \cdot {}_n p_y = \\
&= {}_n p_x (1 - {}_n p_y) + {}_n p_y (1 - {}_n p_x) + {}_n p_x \cdot {}_n p_y = \\
&= {}_n p_x - {}_n p_x \cdot {}_n p_y + {}_n p_y - {}_n p_x \cdot {}_n p_y + {}_n p_x \cdot {}_n p_y = \\
&= \boxed{{}_n p_{\overline{xy}} = {}_n p_x + {}_n p_y - {}_n p_x \cdot {}_n p_y}
\end{aligned}$$

Probabilidad de disolución y no extinción: Transcurridos n años alguno de los dos individuos ha fallecido, pero no los dos: por lo tanto, uno de ellos (y sólo uno) ha sobrevivido.(Ha sobrevivido *exactamente* 1 cabeza). Es la situación pintada o bien de azul o bien de amarillo, pero no de verde.

$$\begin{aligned}
&{}_n p_{xy}^{[1]} = {}_n p_x \cdot {}_n q_y + {}_n q_x \cdot {}_n p_y = \\
&= {}_n p_x (1 - {}_n p_y) + {}_n p_y (1 - {}_n p_x) = \\
&= {}_n p_x + {}_n p_y - 2 . {}_n p_x \cdot {}_n p_y = \\
&= \boxed{{}_n p_{xy}^{[1]} = {}_n p_{\overline{xy}} - {}_n p_{xy}}
\end{aligned}$$

Acaba correspondiendo con la diferencia entre la probabilidad de No-Extinción y la de Supervivencia-Conjunta.

Probabilidad de extinción: Transcurridos n años los dos individuos han fallecido. Ningunos de los dos ha sobrevivido. Se corresponde con la zona exterior a los diagramas de Venn (sin color) y es, obviamente, el suceso complementario de la no extinción.

$$\begin{aligned}
&{}_n q_{\overline{xy}} = {}_n q_x \cdot {}_n q_x = (1 - {}_n p_x)(1 - {}_n p_y) = \\
&= 1 - {}_n p_x - {}_n p_y + {}_n p_x \cdot {}_n p_y = \\
&= 1 - ({}_n p_x + {}_n p_y - {}_n p_{xy}) = \\
&= \boxed{{}_n q_{\overline{xy}} = 1 - {}_n p_{\overline{xy}}}
\end{aligned}$$

Probabilidad de disolución: Transcurridos n años alguno de los dos individuos ha fallecido. Es el complementario de la supervivencia conjunta y en el gráfico se corresponde con todo lo que no sea la intersección (todo lo que *no es verde*)

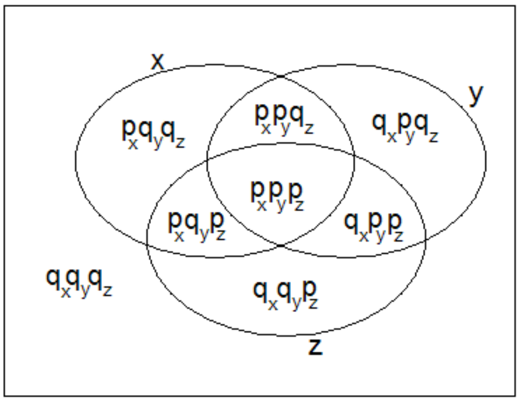
$$\begin{aligned}
&{}_n q_{xy} = {}_n q_x \cdot {}_n p_y + {}_n q_y \cdot {}_n p_x + {}_n q_x \cdot {}_n q_y = \\
&= (1 - {}_n p_x)\, {}_n p_y + (1 - {}_n p_y)\, {}_n p_x + (1 - {}_n p_x)(1 - {}_n p_y) = \\
&= {}_n p_y - {}_n p_x \cdot {}_n p_y + {}_n p_x - {}_n p_x \cdot {}_n p_y + 1 - {}_n p_y - {}_n p_x + {}_n p_x \cdot {}_n p_y = \\
&= 1 - {}_n p_x \cdot {}_n p_y = \boxed{{}_n q_{xy} = 1 - {}_n p_{xy}}
\end{aligned}$$

Estos mismas cinco situaciones pueden plantearse de forma diferida en el tiempo y nos encontraríamos con las correspondientes probabilidades diferidas.

Probabilidades para más de dos cabezas : Actuarianos

La situación para tres o más cabezas la situación será similar aunque mucho más compleja al aumentar las combinaciones de forma acelerada.

Visualizar la situación para el caso de tres cabezas puede hacerse según el siguiente gráfico:



1. Probabilidad de *supervivencia conjunta*	$\boxed{{}_n p_{xyz} = {}_n p_x \cdot {}_n p_y \cdot {}_n p_y}$
2. probabilidad de que sobreviva exactamente una cabeza	${}_n p^{[1]}_{\overline{xyz}} = {}_n p_x \cdot {}_n q_y \cdot {}_n q_z + {}_n p_y \cdot {}_n q_x \cdot {}_n q_z + {}_n p_z \cdot {}_n q_x \cdot {}_n q_y =$ $= {}_n p_x .(1 - {}_n p_y).(1 - {}_n p_z) + {}_n p_y .(1 - {}_n p_x).(1 - {}_n p_z) + {}_n p_z .(1 - {}_n p_x).(1 - {}_n p_y) =$ $= {}_n p_x + {}_n p_y + {}_n p_z - 2{}_n p_x \cdot {}_n p_y - 2{}_n p_x \cdot {}_n p_z - 2{}_n p_y \cdot {}_n p_z + 3{}_n p_x \cdot {}_n p_y \cdot {}_n p_z =$ $= \boxed{{}_n p^{[1]}_{\overline{xyz}} = {}_n p_x + {}_n p_y + {}_n p_z - 2{}_n p_{xy} - 2{}_n p_{xz} - 2{}_n p_{yz} + 3{}_n p_{xyz}}$
3. probabilidad de que sobrevivan exactamente dos cabezas	${}_n p^{[2]}_{\overline{xyz}} = {}_n p_x \cdot {}_n p_y \cdot {}_n q_z + {}_n p_y \cdot {}_n p_z \cdot {}_n q_x + {}_n p_z \cdot {}_n p_x \cdot {}_n q_y =$ $= {}_n p_x \cdot {}_n p_y .(1 - {}_n p_z) + {}_n p_y \cdot {}_n p_z .(1 - {}_n p_x) + {}_n p_z \cdot {}_n p_x (1 - {}_n p_y) =$ $= \boxed{{}_n p^{[2]}_{\overline{xyz}} = {}_n p_{xy} + {}_n p_{yz} + {}_n p_{zx} - 3{}_n p_x \cdot {}_n p_y \cdot {}_n p_z}$
4. probabilidad de que ninguna sobreviva n años (*extinción*)	${}_n q_{\overline{xyz}} = {}_n q_x \cdot {}_n q_y \cdot {}_n q_z =$ $= 1 - {}_n p_x - {}_n p_y - {}_n p_z + {}_n p_{xy} + {}_n p_{xz} + {}_n p_{yz} - {}_n p_{xyz}$ cumpliéndose que: ${}_n p_{xyz} + {}_n p^{[1]}_{\overline{xyz}} + {}_n p^{[2]}_{\overline{xyz}} + {}_n q_{\overline{xyz}} = 1$
5. probabilidad de que al menos uno sobreviva	$\boxed{{}_n p^{1}_{\overline{xyz}} = 1 - {}_n q_{\overline{xyz}}}$

6. Probabilidad de que sobrevivan al menos 2	${}_n p^2_{\overline{xyz}} = {}_n p_{xy} \cdot {}_n q_z + {}_n p_{xz} \cdot {}_n q_y + {}_n p_{yz} \cdot {}_n q_x + {}_n p_{xyz} =$ $= {}_n p_{xy} + {}_n p_{xz} + {}_n p_{yz} - 2 .{}_n p_{xyz}$
7.Probabilidad de que al menos fallezca 1 (*disolución*)	${}_n q_{xyz} = 1 - {}_n p_{xyz}$
8. Probabilidad de que sobreviva como máximo una cabeza	${}_n p_{\overline{xyz}} 1 = {}_n p^{[0]}_{\overline{xyz}} + {}_n p^{[1]}_{\overline{xyz}} = {}_n q_{\overline{xyz}} + {}_n p^{[1]}_{\overline{xyz}} = 1 - {}_n p^2_{\overline{xyz}}$
9. Probabilidad de que sobreviva como máximo dos cabezas	${}_n p_{\overline{xyz}} 2 = {}_n p^{[0]}_{\overline{xyz}} + {}_n p^{[1]}_{\overline{xyz}} + {}_n p^{[2]}_{\overline{xyz}} = 1 - {}_n p_{xyz}$
	También podríamos considerara otros casos donde se tuviera en cuenta el orden de fallecimiento.

m vidas : Actuarianos

Como en situaciones anteriores podemos considerar , para el caso general de m vidas las probabilidades de los sucesos fundamentales (o probabilidades fundamentales):

Supervivencia conjunta: $\boxed{{}_n p_{x_1 x_2 \ldots x_m} = \prod_{i=1}^{m} {}_n p_{x_i}}$

Disolución: $\boxed{{}_n q_{x_1 x_2 \ldots x_m} = 1 - \prod_{i=1}^{m} {}_n p_{x_i}}$

Extinción: $\boxed{{}_n q_{\overline{x_1 x_2 \ldots x_m}} = \prod_{i=1}^{m} {}_n q_{x_i}}$

No extinción: $\boxed{{}_n p_{\overline{x_1 x_2 \ldots x_m}} = 1 - \prod_{i=1}^{m} {}_n q_{x_i}}$

Pero más allá de las probabilidades fundamentales el número de sucesos que podemos considerar va creciendo exponencialmente con m (2^m). En el caso en el que la edad de todos los miembros del grupo sea la misma la probabilidades individuales serán iguales para todos ellos ($_np_x$ y $_nq_x$) y las probabilidades pueden computarse haciendo uso de la combinatoria pero cuando no es así se precisa recurrir al cálculo de los operadores actuariales Z , o actuarianos que pueden aplicarse aunque las edades sean distintas (siempre que se cumpla la homogeneidad) :

Cuando las edades de las m cabezas sean diferentes $x_1,x_2,\ldots,x_m$. Utilizaremos los actuarianos Z^r definidos como:

$$Z^0 = 1$$

$$Z^1 = {}_np_{x_1} + {}_np_{x_2} + \ldots. + {}_np_{x_m} = \sum_{i=1}^{m} {}_np_{x_i}$$ la suma de todas las probabilidades individuales de supervivencia

$$Z^2 = {}_np_{x_1x_2} + {}_np_{x_1x_3} + \ldots + {}_np_{x_{m-1}x_m} = \sum_{i<j}^{m} {}_np_{x_ix_j}$$ la suma de las probabilidades de supervivencia de todas las parejas

$$Z^3 = \sum_{i<j<k}^{m} {}_np_{x_ix_jx_k}$$ la suma de las probabilidades de supervivencia de todas los trios

.....

$$Z^m = {}_np_{x_1x_2\ldots x_m}$$ la probabilidad de supervivencia conjunta

$$Z^{m+1} = Z^{m+2} = Z^{m+h} = 0 \; \forall h > 0$$

Puede comprobarse que :

La probabilidad de que sobrevivan exactamente r cabezas, en función de los actuarianos, es : $\boxed{{}_np_{\overline{x_1x_2\ldots x_m}}^{[r]} = \dfrac{Z^r}{(1+Z)^{r+1}}}$

La probabilidad de que sobrevivan al menos r cabezas, en función de los actuarianos, es: $\boxed{{}_np_{\overline{x_1x_2\ldots x_m}}^{r} = \dfrac{Z^r}{(1+Z)^{r}}}$

Debido a la naturaleza particular de los actuarianos , que no son exactamente funciones polinómicas para calcular estas dos expresiones debe hacerse por uno de los dos procedimientos siguientes:

Procedimiento 1 (Ayuso, et al.(2006) : "Estadistica actuarial vida", Pub. Uiversidad de Barcelona):

Considerar que el desarrollo en serie de la función $(1+x)^{-k}$ es:

$$\left(f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(0).x^j}{j!} \right)$$

$$(1+x)^{-k} = 1 - k.x + \frac{k(k+1)}{2!}x^2 - \frac{k(k+1)(k+2)}{3!}x^3 + \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4!}x^4 + ... \pm$$

Y a partir de esta expresión considerar que grado superior a m el actuariano se anula.

Procedimiento 2 (Pavía, (2010): "101 Ejercicios de Estadística Actuarial Vida",Ed. Garceta).
Dividiendo polinómicamente, disponiendo el denominador en orden de grado creciente, el hecho de que para grados superiores a m el actuariano se anula nos garantiza encontrar el cociente.

Los dos procedimientos son equivalentes. Veamos su aplicación en un ejemplo:

Ejemplo:
Supongamos un grupo formado por 5 cabezas de edades 60,65,62,58,55. Y queremos calcular la probabilidad de que a los 10 años sobrevivan exactamente dos personas .
Para ello disponemos de los actuarianos para esas edades y diferidos 10 años que son:
$Z=2.23$; $Z^2=4.95$; $Z^3=2.82$; $Z^4=0.95$; $Z^5=0.2$.

Tendríamos: que aplicando la expresión

$${}_n p^{[r]}_{x_1 x_2 \ldots x_m} = \frac{Z^r}{(1+Z)^{r+1}} ---\rightarrow {}_{10} p^{[2]}_{60:65:62:58:55} = \frac{Z^2}{(1+Z)^3}$$

Por el primer procedimiento:

$$\boxed{\begin{array}{l} \frac{Z^2}{(1+Z)^3} = Z^2(1+Z)^{-3} = Z^2(1 - 3Z + \frac{3.4}{2!}Z^2 - \frac{3.4.5}{3!}Z^3 + ...-) = * \\ = Z^2 - 3Z^3 + 6Z^4 - 10Z^5 = 4,95 - 3\bullet 2,82 + 6\bullet 0,95 - 10\bullet 0,2 = 0.19 \\ \text{*no es necesario seguir más allá porque se anulará a partir del grado 6} \end{array}}$$

Por el segundo procedimiento:

$$\left(1+Z\right)^3 = 1 + 3Z + 3Z^2 + Z^3$$

$$\begin{array}{lllll|l}
Z^2 & & & & & \underline{1+3Z+3Z^2+Z^3} \\
-Z^2 & -3Z^3 & -3Z^4 & -Z^5 & & Z^2 - 3Z^3 + 6Z^4 - 10Z^5 \\
 & 3Z^3 & \underline{+9Z^4} & \underline{+9Z^5} & & \\
 & & 6Z^4 & \underline{+8Z^5} & & \\
 & & -6Z^4 & \underline{-18Z^5} & & \\
 & & & -10Z^5 & &
\end{array}$$

Obteniéndose el mismo resultado.

A partir, de los actuarianos, entonces, es fácil obtener las principales probabilidades y aún muchas otras más:

Supervivencia conjunta: ${}_n p_{x_1 x_2 \ldots x_m} = Z^m$

Extinción: ${}_n q_{\overline{x_1 x_2 \ldots x_m}} = \dfrac{1}{1+Z}$

No extinción: ${}_n p_{\overline{x_1 x_2 \ldots x_m}} = \dfrac{Z}{1+Z}$

Supervivencia de al menos r personas: ${}_n p^{r}_{\overline{x_1 x_2 \ldots x_m}} = \dfrac{Z^r}{(1+Z)^r}$

Supervivencia de exactamente r personas: ${}_n p^{[r]}_{\overline{x_1 x_2 \ldots x_m}} = \dfrac{Z^r}{(1+Z)^{r+1}}$

Disolución: ${}_n q_{x_1 x_2 \ldots x_m} = 1 - Z^m$