TEMA 5: La mortalidad como fenómeno continuo.

• Variable aleatoria edad de muerte. Función de distribución y función de densidad.

• Relación entre las probabilidades básicas para una cabeza y la variable aleatoria edad de muerte.

• Tanto instantáneo de mortalidad.

• Tantos anual y central de mortalidad.

• Esperanza de vida y vida probable.

• Generalización de probabilidades de supervivencia y mortalidad para dos o más cabezas. Distribuciones conjuntas.

En los fenómenos biométricos, como en muchos otros fenómenos la consideración de modelos que impliquen o supongan la continuidad suele ofrecer una riqueza muy superior en las prestaciones de las herramientas analíticas, por lo que es, a menudo, muy recomendable su consideración. Al margen de esto, la magnitud fundamental que está asociada a la biometría actuarial es el **tiempo** cuya naturaleza suele tomarse por intrínsecamente continua en la mayoría de los contextos científicos.

Por ello la variable biométrica fundamental la **edad de fallecimiento** puede considerarse una variable aleatoria continua que tomaría valores reales positivos.

Designaremos por X a la variable aleatoria continua "edad de fallecimiento": $X \in [0,\infty[$. Cuando se considera que la vida humana no puede sobrepasar, de hecho, una cierta edad máxima, llamada infinito actuarial y designada por ω, lo expresaremos como: $X \in [0, \omega[$

También consideraremos, en ocasiones la variable $T(x)=(X-x)$ **vida residual** a la edad x Obviamente definida para valores de $T(x) \in [0, \omega-x[$

Obviamente la **función de distribución** de la edad de fallecimiento vendrá dada por $F(x)= P(X \le x)$ que gozará de las propiedades habituales de toda función de distribución:

- $F(0)=0$
- $F(\infty)=1$ o bien $F(\omega)=1$
- F es no decreciente y continua por la derecha.

A partir de la función de distribución se puede obtener la función densidad de probabilidad, es decir:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = F'(x),$$

pudiéndose, por tanto, recurrir indistintamente a una u otra para obtener las diferentes probabilidades. Así, por ejemplo, la probabilidad de que un individuo fallezca entre la edad x y x+t se podría obtener a partir de:

$$P(x < X \le x+t) = P(X \le x+t) - P(X \le x) = F(x+t) - F(x)$$

$$P(x < X < x+t) = \int_x^{x+t} f(y)dy = F(x+t) - F(x)$$

o, para valores pequeños de t, también mediante:

$$P(x < X \leq x+t) = f(x)\, t + O(t),$$

es decir, la probabilidad de fallecer entre la edad x y x+t es igual al valor de la densidad de probabilidad de fallecimiento en el punto multiplicada por la longitud del intervalo, t, más un infinitésimo de t, O(t), de orden superior; es decir, O(t) verifica que $\lim_{t\to 0} O(t)/t = 0$.

Por otra parte la distribución de la variable T(x) vida residual a la edad x será tal que su función de distribución a la que denotaremos por G , para distinguirla, dependerá del valor de x y vendrá dada por la siguiente probabilidad condicionada:

$$G_x(t) = P\left((X \leq x+t) \mid (X > x)\right)$$

(Ya que la mera existencia de vida residual a cierta edad, x, presupone que la edad de la muerte es superior a x.)

$$G_x(t) = P\left((X \leq x+t) \mid (X > x)\right) = \frac{P(x < X \leq x+t)}{P(X > x)} = \frac{F(x+t) - F(x)}{1 - F(x)}$$

para $0 < t < \infty$ o bien $0 < t < \omega$.

La función de densidad vendrá dada por su derivada:

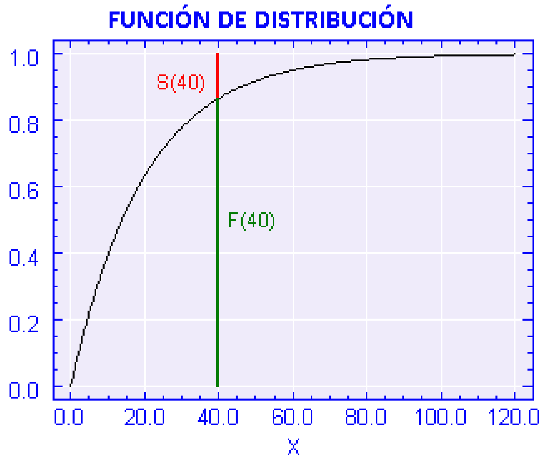
$$g_x(t) = \frac{\partial}{\partial t} G_x(t) = \frac{f(x+t)}{1 - F(x)}$$

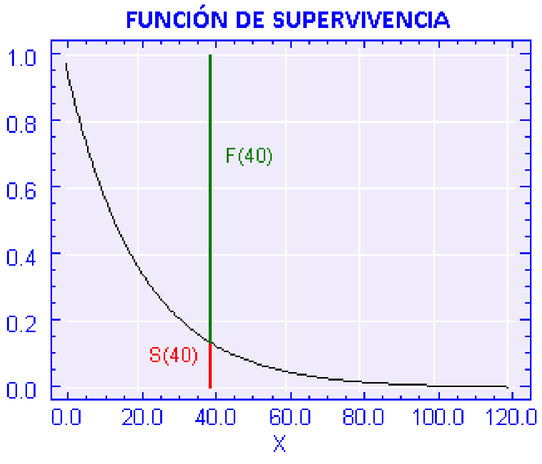
Función de supervivencia: Otra forma de considerar la cuestión de la vida de sujeto asegurado es trabajar con su función de supervivencia definida como la probabilidad de alcanzar cierta edad, x, y por lo tanto que la edad de la muerte sea superior a x:

$$\boxed{S(x) = P(X > x) = 1 - F(x)}$$

Es fácil comprobar que:

- S(0)=1
- $S(\infty)=0$ o $S(\omega)=0$
- S es no creciente (habitualmente decreciente) y continua por la derecha





Relación entre las probabilidades básicas para una cabeza y la variable aleatoria edad de muerte.

La **probabilidad temporal de fallecimiento** de un individuo de edad x a la edad x+h vendrá dada por:

$${}_h q_x = P((X \le x+h) \,|\, (X > x)) = \frac{P(x < X \le x+h)}{P(X > x)} = \frac{F(x+h) - F(x)}{1 - F(x)}$$

Ya que al estar hablando de un individuo de edad x estamos exigiendo la condición de que X > x

Hay que hacer notar que los valores que toma la *función de distribución* de la variable *vida residual* no son otra cosa que los valores correspondientes de la *probabilidad temporal de fallecimiento*:

$$G_x(t) = P\big((X \le x+t) \,|\, (X > x)\big) = {}_t q_x$$

Por otra parte, la **probabilidad temporal de supervivencia** de un individuo de edad x hasta la edad x+h vendrá dada por:

$${}_h p_x = P((X > x+h) \,|\, (X > x)) = \frac{P(X > x+h)}{P(X > x)} = \frac{1 - F(x+h)}{1 - F(x)} = \frac{S(x+h)}{S(x)}$$

Es fácil darse cuenta de que la probabilidad temporal de supervivencia de un recién nacido coincide con la función de supervivencia.

Aunque las probabilidad temporales de fallecimiento y supervivencia están definidas para cualquier período h, son frecuentes las de periodo “un año exacto”, (h=1), que se corresponderían con q_x y p_x

Por otra parte se puede obtener una relación entre las probabilidades temporales (fallecimiento o supervivencia) para un periodo “entero” de años y las probabilidades temporales de (fallecimiento o supervivencia) en un año:

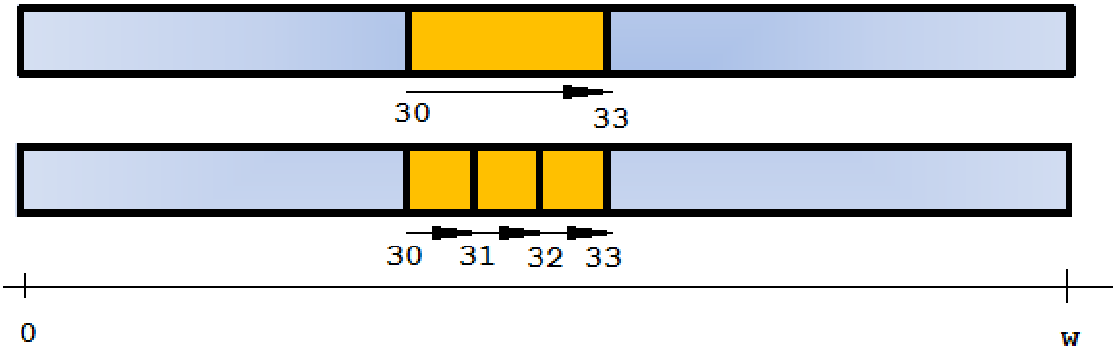
Si consideramos n, un número entero (años enteros) tendremos:
Para la supervivencia:

$${}_n p_x = \frac{P(X > x+n)}{P(X > x)} = \frac{P(X > x+n)}{P(X > x+n-1)} \frac{P(X > x+n-1)}{P(X > x+n-2)} \cdots \frac{P(X > x+1)}{P(X > x)} =$$

$$= {}_n p_x = p_x . p_{x+1} \cdots p_{x+n} = \prod_{i=0}^{n} p_{x+i}$$

Es decir: la probabilidad de sobrevivir un número entero de años a la edad x es el producto de las probabilidades de sobrevivir un año más a las edades x, x+1, x+2 , …, n-1.

En el siguiente diagrama se ilustra un ejemplo en el que podemos ver como probabilidad de sobrevivir 3 años desde los 30 que coincide con el producto de las probabilidades de sobrevivir un año a los 30, a los 31 y a los 32.

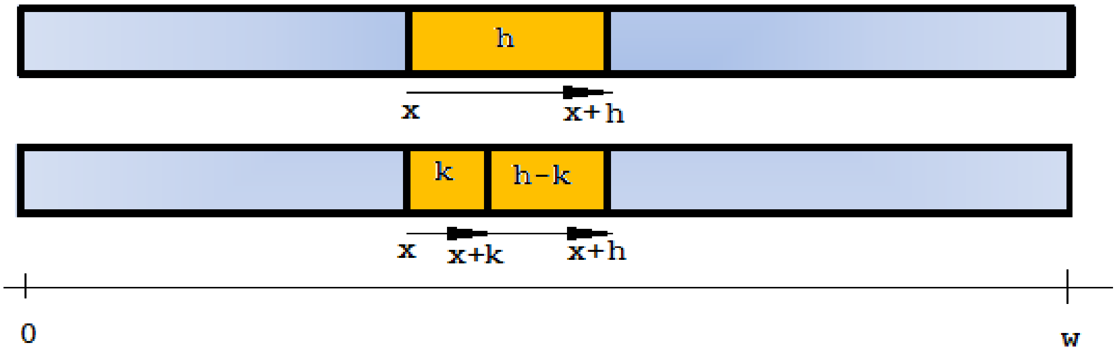


El resultado para la probabilidad de supervivencia de años enteros se puede generalizar en lo que se conoce como **propiedad de escindibilidad**:

"Para cualesquiera k y h , no necesariamente enteros, con k < h ,se cumple que
${}_h p_x = {}_k p_x \cdot {}_{h-k} p_{x+k}$ "

La prueba es similar a la anterior:

$$ {}_h p_x = \frac{P(X > x+h)}{P(X > x)} = \frac{P(X > x+k)}{P(X > x)} \cdot \frac{P(X > x+h)}{P(X > x+k)} = {}_k p_x \cdot {}_{h-k} p_{x+k} $$



Sin embargo no ocurrirá igual para las probabilidades de fallecimiento. Supuesto el caso de k < h como antes la relación será : (*)

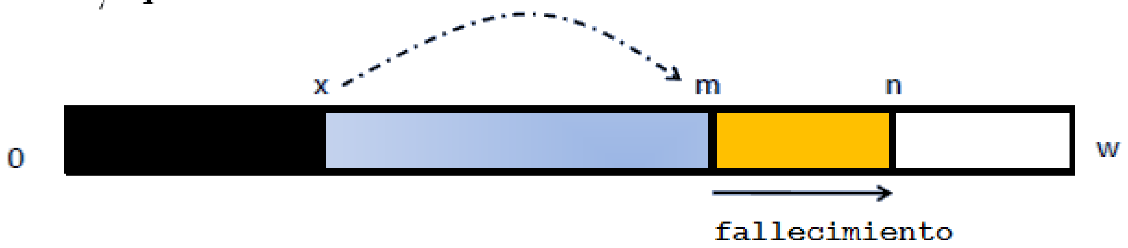
$$ {}_h q_x = \frac{P(x < X \le x+h)}{P(X > x)} = \frac{P(x < X \le x+k) + P(x+k < X \le x+h)}{P(X > x)} = $$

$$ = \frac{P(x < X \le x+k)}{P(X > x)} + \frac{P(X > x+k)}{P(X > x)} \cdot \frac{P(x+k < X \le x+h)}{P(X > x+k)} = $$

$$ \boxed{{}_h q_x = {}_k q_x + {}_k p_x \cdot {}_{(h-k)} q_{(x+k)}} $$

La **probabilidad diferida de fallecimiento** es la de un suceso que supone la supervivencia temporal hasta un tiempo y la muerte posterior en otro periodo:

$_{m/n}q_x$



La probabilidad diferida m años y temporal n años a la edad x: consistirá en la probabilidad de que un individuo de edad x sobreviva hasta x+m y muera entre x+m y x+m+n

$$_{m/n}q_x = \frac{P(x+m < X < x+m+n)}{P(X > x)}$$

Se cumplen las siguiente relaciones:

1- $$_{m/n}q_x = \frac{F(x+m+n) - F(x+m)}{1 - F(x)} = \frac{S(x+m) - S(x+m+n)}{S(x)}$$

2- $$_{m/n}q_x = \frac{P(x+m < X < x+m+n)}{P(X > x)} = \frac{P(x > x+m)}{P(X > x)} \frac{P(x+m < X < x+m+n)}{P(x > x+m)} =$$

$$= \boxed{_{m/n}q_x = {}_m p_x \cdot {}_n q_{x+m}}$$

3- $\boxed{_{m/n}q_x = {}_{m+n}q_x - {}_m q_x}$ se deduce de la anterior y de (*) ir a demostración

4- $$_{m/n}q_x = {}_{m+n}q_x - {}_m q_x = (1 - {}_{m+n}p_x) - (1 - {}_m p_x) =$$

$$\boxed{= {}_{m/n}q_x = {}_m p_x - {}_{m+n}p_x}$$

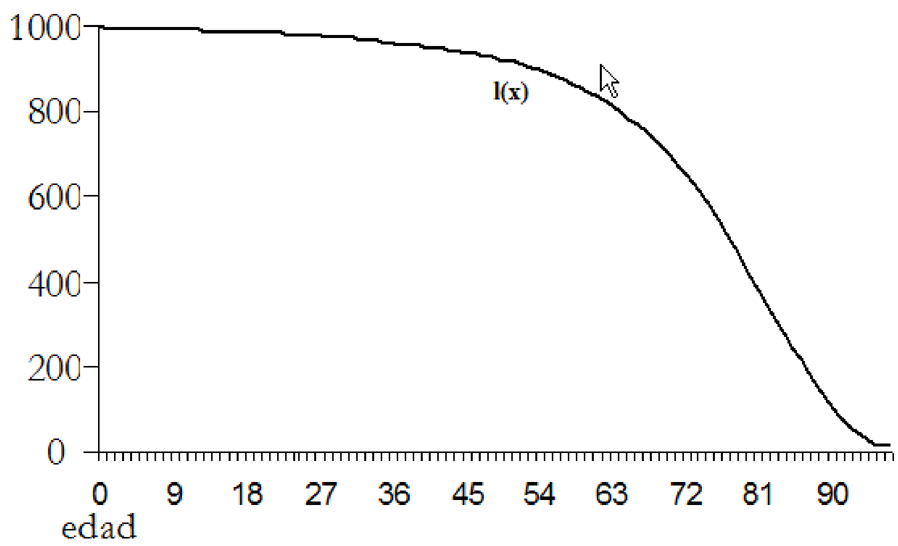
Un caso particular importante es aquél en el que n=1 es decir la probabilidad de fallecimiento diferida m años y temporal 1 año:
Se suele simbolizar por: $_{m/}q_x$

También podemos considerar el número de supervivientes en cada edad como un continuo, lo que supone una extensión del elemento discreto l_x que aparece en las tablas de mortalidad. Para ello, se define la denominada **función de supervivivientes**, o **función de cohorte** l(x) —también denominada, al igual que S(x), función de supervivencia dado que $l(x)=l_0\, S(x)$—, como una aplicación de $[0,\infty[$,o bien de $[0,\omega]$ en los números reales que, para cada valor x del intervalo, proporciona el número de individuos sobrevivientes a la edad x procedentes de una cohorte inicial de nacidos en un mismo instante $l(0)= l_0$.

Esta función es no creciente (usualmente decreciente), en cero toma un valor igual al tamaño inicial de la cohorte y verifica que $l(\omega) = 0$ dado que ningún individuo sobrevive a la edad ω.

La función $l(x)$ proporcionará para los valores *enteros* de x las cantidades de supervivientes a cada edad que aparecen en la *tabla de mortalidad* del colectivo asociado, es decir, $l(x) = l_x$ para $x=0,1,2,3,....$

Su perfil será semejante a este:



La función $l(x)$ es, en realidad, el valor esperado en el momento x del proceso estocástico "Cohorte superviviente": en efecto, consideremos un momento cualquiera del tiempo actuarial x, y consideremos la variable aleatoria X = edad de fallecimiento cuya función de distribución es F(x) y cuya función de supervivencia es S(x). Partiendo de una cohorte inicial de l_0 individuos. Llamaremos $\mathcal{L}(x)$ al número de estos individuos que han sobrevivido hasta el momento x , Obviamente $\mathcal{L}(x)$ es una cantidad incierta, una variable aleatoria.

Recordemos que la probabilidad de que un individuo de la cohorte sobreviva un tiempo x es precisamente S(x) y que consideramos entre las hipótesis biométricas básicas la independencia del comportamiento aleatorio de todos los individuos, de modo que, obviamente, la distribución de $\mathcal{L}(x)$ será una binomial : $\mathcal{L}(x) \rightarrow B(l_0 , S(x))$ de modo que: $l(x)= E(\mathcal{L}(x))= l_0 .S(x)$

Tanto instantáneo de mortalidad

El tanto instantáneo de mortalidad, μ_x , es una medida de la fuerza o intensidad de la mortalidad a la edad x , para los individuos que han alcanzado esa edad .
Su definición formal sería:

$$\boxed{\mu_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta_t q_x}{\Delta t}}$$

Desarrollando la definición tendremos:

$$\mu_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta_t q_x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \frac{P(x < X < x+t+\Delta t) - P(x < X < x+t)}{P(X > x)} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \frac{F(x+t+\Delta t) - F(x+t)}{1 - F(x)} = \frac{1}{(1-F(x))} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{F(x+t+\Delta t) - F(x+t)}{\Delta t} =$$

$$= \frac{1}{(1-F(x))} . f(x) = -\frac{S'(x)}{S(x)} = -\frac{d}{dx} \ln(S(x))$$

Por ejemplo: Supongamos que la variable X edad de fallecimiento tiene una función de distribución:

$$F(x) = 1 - e^{-0.0001x^2} \qquad 0 < x < \infty$$

Lo que supone que su función de densidad y su función de supervivencia serán:

$$f(x) = F'(x) = 0.0002x\, e^{-0.0001x^2} \qquad\qquad S(x) = 1 - F(x) = e^{-0.0001x^2}$$

Y por lo tanto el tanto instantáneo de mortalidad vendrá dado por:

$$\mu(x) = \frac{f(x)}{1-F(x)} = \frac{0.0002x\, e^{-0.0001x^2}}{1-(1-e^{-0.0001x^2})} = 0.0002x$$

$$\mu(x) = -\frac{S'(x)}{S(x)} = -\frac{-0.0002x\, e^{-0.0001x^2}}{e^{-0.0001x^2}} = 0.0002x$$

$$\mu(x) = -\frac{d}{dx} \ln(S(x)) = -\frac{d}{dx}(-0.0001x^2) = 0.0002x$$

Ello quiere decir que , por ejemplo, para una edad de 40 años el tanto instantáneo de mortalidad será de de 0.008. Lo que hay que interpretar como que la probabilidad temporal de muerte ($_tq_{40}$) arranca a esa edad con una pendiente de 0.008 (arranca creciendo un 8 por mil anual)
El tanto instantáneo no debe confundirse, con la probabilidad de fallecimiento anual, ni con su derivada:

$$\boxed{q_x = \frac{F(x+1) - F(x)}{1 - F(x)}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{en el ejemplo } q_x = \frac{F(x+1) - F(x)}{1 - F(x)} = \frac{1 - e^{-0.0001(x+1)^2} - (1 - e^{-0.0001x^2})}{e^{-0.0001x^2}}$$

$$= \frac{e^{-0.0001x^2} - e^{-0.0001(x+1)^2}}{e^{-0.0001x^2}} = \frac{e^{-0.0001x^2} - (e^{-0.0001x^2} . e^{-0.0002x} . e^{-0.0001})}{e^{-0.0001x^2}} = 1 - e^{-0.0001(2x+1)}$$

Y su derivada:

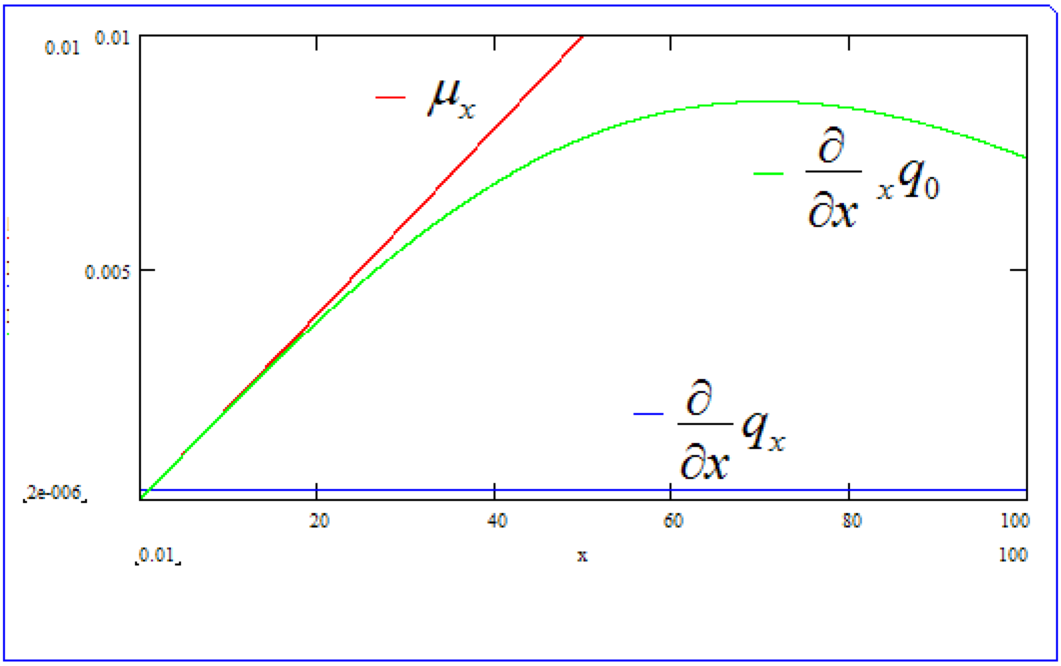
$$\frac{\partial}{\partial x} q_x = \frac{\partial}{\partial x}(1 - e^{-0.0001(2x+1)}) = 0.0002.e^{-0.0001(2x+1)}$$

Que son expresiones bien distintas que arrojarán resultados numéricos bien diferentes: Para 40 años, la probabilidad temporal tomaría el valor: q_{40}=0.00807 y su derivada 1.61×10^{-6}

Tampoco debe confundirse con la derivada en x de la probabilidad temporal de fallecimiento al nacer (derivada de ${}_xq_0$)
${}_xq_0$, es de hecho, F(x) y su derivada f(x) cosas bien distintas de μ_x.

En el ejemplo que hemos considerado tendríamos:

$$\mu_x = 0.0002x \qquad \frac{\partial}{\partial x} q_x = 0.0002.e^{-0.0001(2x+1)} \qquad \frac{\partial}{\partial x}\, {}_xq_0 = f(x) = 0.0002x\, e^{-0.0001x^2}$$



RELACIONES ENTRE LAS FUNCIONES BIOMÉTRICAS

	f(x)	F(x)	S(x)	μ(x)	l(x)
f(x)		F'(x)	-S'(x)	$\mu(x).e^{-\int_0^x \mu(y)dy}$	$\frac{-l'(x)}{l_0}$
F(x)	$\int_0^x f(y)dy$		1-S(x)	$1-e^{-\int_0^x \mu(y)dy}$	$1-\frac{l(x)}{l_0}$
S(x)	$\int_x^\infty f(y)dy$	1-F(x)		$e^{-\int_0^x \mu(y)dy}$	$\frac{l(x)}{l_0}$
μ(x)	$\frac{f(x)}{1-\int_0^x f(y)dy}$	$\frac{F'(x)}{1-F(x)}$	$-\frac{S'(x)}{S(x)}=-\frac{d}{dx}\ln S(x)$		$-\frac{l'(x)}{l(x)}=-\frac{d}{dx}\ln l(x)$
l(x)	$l_0.(1-\int_0^x f(y)dy)$	$l_0.(1-F(x))$	$l_0.S(x)$	$l_0.e^{-\int_0^x \mu(y)dy}$	

Defunciones : La función $_hd_x$ dará cuenta de las defunciones en la cohorte en el periodo de x a x+h : $_hd_x=l(x)-l(x+h)$

Como el tanto instantáneo de mortalidad es :

$$\mu_x = -\frac{l'(x)}{l(x)} = -\frac{d}{dx}\ln l(x)$$

Podemos poner las defunciones en función del tanto instantáneo de mortalidad como:

$$_hd_x = \int_0^h l(x+t)\mu(x+t)dt = \int_0^h l(x+t)\left(-\frac{l'(x+t)}{l(x+t)}\right)dt =$$

$$= \int_0^h -l'(x+t)dt = l(x+h) - l(x) = {}_hd_x$$

Y para las defunciones anuales (h=1, que se suprime en la notación):

$$\boxed{d_x = l(x+1) - l(x) = \int_0^1 l(x+t)\mu(x+t)dt}$$

Tantos anual y central de mortalidad.

Tanto de supervivencia y ***Tanto de mortalidad***

Las probabilidades temporales de supervivencia y de fallecimiento pueden expresarse en función de la cohorte (función de supervivientes l(x). Cuando se hace así hablamos de tanto de supervivencia o de mortalidad en la medida en que se expresan tales probabilidades como tantos o frecuencias relativas

$$_tp_x = \frac{l(x+t)}{l(x)} \text{ tanto de supervivencia}$$

$$_tq_x = \frac{_td_x}{l(x)} = \frac{l(x)-l(x+t)}{l(x)} \text{ tanto de mortalidad}$$

Si consideramos una temporalidad anual hablaríamos de tanto anual de supervivencia y de mortalidad:

$$p_x = \frac{l(x+1)}{l(x)} = \frac{l_{x+1}}{l_x} \text{ tanto anual de supervivencia}$$

$$q_x = \frac{d_x}{l(x)} = \frac{l(x)-l(x+1)}{l(x)} = \frac{d_x}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} \text{ tanto anual de mortalidad}$$

Tanto central de mortalidad m_x

Sin embargo l_x no se observa directamente, por lo que se debe recurrir a estimarlo a partir de la información disponible lo que trae importantes problemas

Por otro lado, es mucho más fácil conocer el número de personas que en un momento dado tienen una edad x (es decir, una edad entre x años y x+1 años menos un instante: el valor de la cohorte de edad x), L_x, que llegar a conocer l_x, el número de personas que sobreviven x años a partir de una cohorte inicial l_0.

Por ello se define una magnitud, que se denota mediante ***tanto central de mortalidad*** y se representa por m_x, que relaciona el número de individuos fallecidos a edad x, d_x, con el número de individuos vivos en dicha edad que todavía no han alcanzado la edad siguiente, L_x. Es decir:

$$\boxed{m_x = \frac{d_x}{L_x}}$$

L_x denota el número de individuos que viven en un momento dado con edad x —que se suele denominar como función censal de supervivencia y se identifica con el promedio de individuos vivos a lo largo de la edad x, y obedece a la expresión:

$$L_x = \int_0^1 l(x+t)\,dt$$

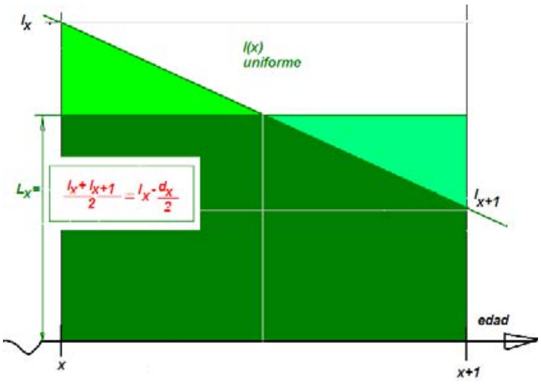
En efecto, L_x se puede interpretar como la suma *infinita* de todos los individuos que tienen en un momento dado una edad entre x y x+1 para todas las edades, consideradas infinitésimo a infinitésimo, que componen el año. Es decir, el número de individuos que poseedores de la edad x todavía no han alcanzado la edad siguiente; número que, además verifica, admitiendo un grupo demográfico cerrado, la relación $L_x \leq l_x$, debido a que todos los individuos que han alcanzando en un momento la edad x+t necesariamente han debido alcanzar previamente la edad x.

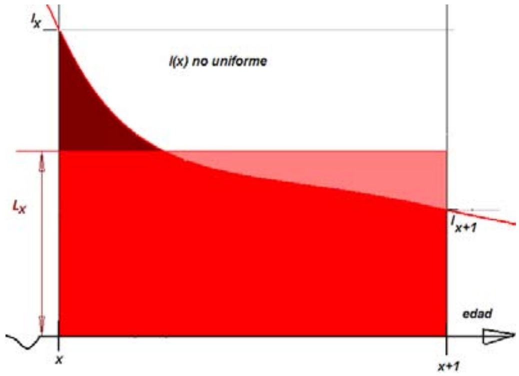
Alternativamente, L_x se puede contemplar como el número total de años que viven, en el transcurso de un año, un colectivo de supervivientes de edad x, l_x.

Veamos: cualquier individuo una vez ha alcanzado la edad exacta x está expuesto, a lo largo de un año, a que le ocurran una de dos posibilidades: a) que alcance con vida la edad x+1, o, b) que fallezca antes de cumplir tal edad. La primera de las posibilidades acontece exactamente a l_{x+1} individuos, mientras la segunda ocurre a d_x sujetos, cada uno de los cuales, no obstante, antes de fallecer habrá vivido una cierta cantidad de tiempo que depende de la intensidad o fuerza con que actúe la mortalidad entre las edades x y x+1, o equivalentemente, de la distribución de fallecidos a lo largo del año. En concreto, si se admite que los fallecidos se distribuyen uniformemente, se tendría que en un subintervalo t del año fallecerían exactamente $t \cdot d_x$ individuos, por lo que el número de sujetos que alcanzan exactamente la edad x+t sería $l(x+t) = l_x - t \cdot d_x$, de forma que sustituyendo se tendría, utilizando que $l_{x+1} = l_x - d_x$, la relación:

$$L_x = \int_0^1 l(x+t)\,dt = \int_0^1 (l_x - t\,d_x)\,dt = l_x\,t\Big]_0^1 - d_x \left.\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = l_x - \frac{d_x}{2} = l_{x+1} + \frac{d_x}{2},$$

que indica que, bajo hipótesis de distribución uniforme, cada uno de los d_x fallecidos ha vivido por término medio durante medio año.

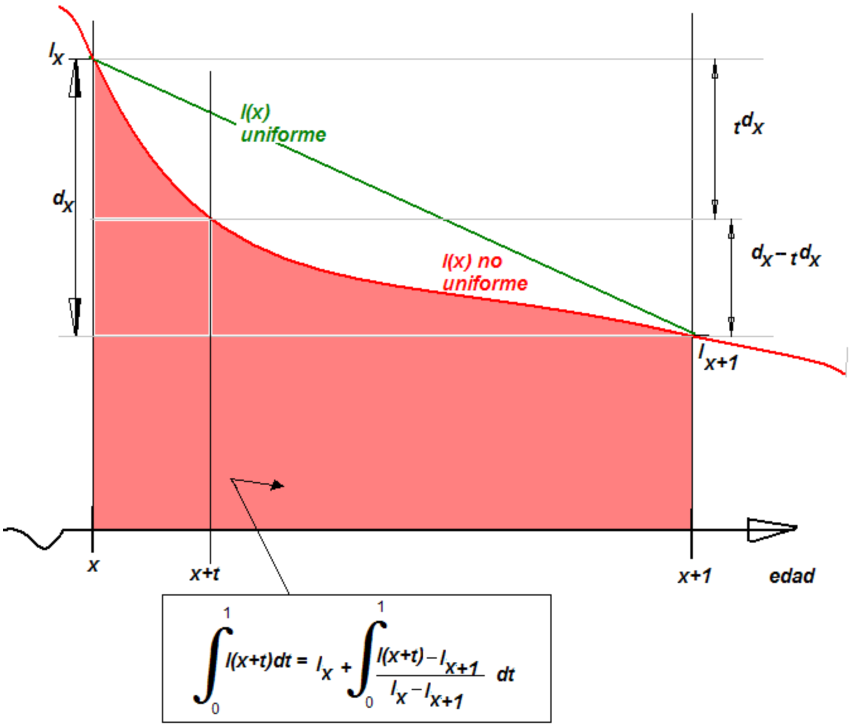




En general, sin embargo, el número de individuos que alcanzan la edad x+t es $l(x+t) = l_x - {}_t d_x$, por lo que se verifica:

$$L_x = \int_0^1 l(x+t)\,dt = \int_0^1 (l_x - {}_t d_x)\,dt = l_x - \int_0^1 {}_t d_x\,dt = l_{x+1} + d_x - \int_0^1 {}_t d_x\,dt =$$

$$= l_{x+1} + d_x \int_0^1 \left(1 - \frac{{}_t d_x}{d_x}\right) dt = l_{x+1} + d_x \int_0^1 \frac{l(x+t) - l_{x+1}}{l_x - l_{x+1}}\,dt$$



es decir, que por término medio cada individuo fallecido entre la edad x y x+1 ha vivido $\int_0^1 \frac{l(x+t) - l_{x+1}}{l_x - l_{x+1}}\,dt$ años.

No obstante, si se acepta la hipótesis de uniformidad para los fallecidos a lo largo del año es posible encontrar una expresión manejable que relaciona los tantos anual y central de mortalidad. En efecto, bajo tal hipótesis se ha visto que se verifica que $L_x = l_x - d_x/2$, de donde:

$$m_x = \frac{d_x}{L_x} = \frac{d_x}{l_x - \frac{d_x}{2}} = \frac{d_x / l_x}{1 - \frac{d_x}{2 l_x}} = \frac{q_x}{1 - \frac{q_x}{2}} = \boxed{m_x = \frac{2 q_x}{2 - q_x}},$$

Y, por tanto, despejando q_x se tiene que:

$$\boxed{q_x = \frac{2 m_x}{2 + m_x}}$$

Y de aquí se deriva:

$$\boxed{p_x = \frac{2 - m_x}{2 + m_x}}$$

Expresiones que permiten expresar las probabilidades de muerte y supervivencia en función del tanto central de mortalidad.

El tanto central de mortalidad podría generalizarse para cualquier intervalo temporal t, ampliando la definición de la función censal de supervivencia como:

$${}_t L_x = \int_0^t l(x+t)\,dt,$$

y de definir el tanto central de mortalidad del período t mediante:

$${}_t m_x = \frac{{}_t d_x}{{}_t L_x},$$

en la práctica no se utiliza debido a que, por una parte, si no se admitiese hipótesis de distribución uniforme de defunciones entre las edades x y x+t aparecerían expresiones extremadamente complejas y, por otra parte, a lo poco realista que sería aceptar tal hipótesis para intervalos superiores al año.

Esperanza de vida y vida probable.

La vida residual $T(x)= X-x$ es, como ya se ha dicho, una variable aleatoria que nos indica la vida que le resta a un individuo de edad x. Obviamente el valor de esta variable se relaciona directamente con las primas que restan por cobrar o con las compensaciones que habrá que abonar en un seguro de vida o de supervivencia.

La esperanza de esta variable es lo que se conoce como **esperanza de vida** a la edad x:

$$\overline{e}_x = E(T(x)) = \int_0^{\omega - x} t.g_x(t)dt$$

Recordemos que la función de densidad de la vida residual era:

$$g_x(t) = \frac{\partial}{\partial t} G_x(t) = \frac{f(x+t)}{1 - F(x)}$$

La probabilidad temporal de supervivencia

$${}_t p_x = P((X > x+t) \mid (X > x)) = \frac{P(X > x+t)}{P(X > x)} = \frac{1 - F(x+t)}{1 - F(x)} = \frac{S(x+t)}{S(x)}$$

Y el tanto instantáneo de mortalidad:

$$\mu(x) = \frac{f(x)}{1-F(x)}$$

Con lo que:

$$\bar{e}_x = E(T(x)) = \int_0^{\omega-x} t.g_x(t)dt = \int_0^{\omega-x} t.\frac{f(x+t)}{1-F(x)}dt = \int_0^{\omega-x} t.\frac{1-F(x+t)}{1-F(x)}\frac{f(x+t)}{1-F(x+t)}dt =$$

$$\int_0^{\omega-x} t \cdot {}_t p_x \cdot \mu(x+t)dt$$

Por otro lado tenemos que:

$${}_t p_x = \frac{l(x+t)}{l(x)} \quad \text{y también que:} \quad \mu(x) = -\frac{l'(x)}{l(x)}$$

Con lo que la esperanza de vida quedará:

$$\bar{e}_x = E(T(x)) = \int_0^{\omega-x} t \cdot {}_t p_x \cdot \mu(x+t)dt = \int_0^{\omega-x} t \cdot \frac{l(x+t)}{l(x)} \cdot \left(-\frac{l'(x+t)}{l(x+t)}\right)dt$$

$$= -\int_0^{\omega-x} t \cdot \frac{l'(x+t)}{l(x)}dt = -\frac{1}{l(x)}\int_0^{\omega-x} t \cdot l'(x+t)dt = \qquad \text{resolviendo por partes}$$

$$\left| \begin{array}{cc} u = t & du = dt \\ dv = l'(x+t)dt & v = l(x+t) \end{array} \right|$$

$$= -\frac{1}{l(x)} \cdot t.l(x+t)\Big]_0^{\omega-x} + \int_0^{\omega-x} \frac{l(x+t)}{l(x)}dt = \int_0^{\omega-x} \frac{l(x+t)}{l(x)}dt = \text{(ya que el primer sumando se anula)}$$

$$\boxed{= \bar{e}_x = \int_0^{\omega-x} {}_t p_x \; dt}$$

Es decir, la esperanza de vida en x se puede contemplar como la suma de las infinitas probabilidades temporales de supervivencia desde la edad actual x hasta el infinito actuarial.

Alternativamente, si no aplicamos la última transformación y consideramos la llamada **cantidad de existencia** ,T_x, número de años que vivirá en total la cohorte de edad x:

$$\boxed{T_x = \int_0^{\omega-x} l(x+t)dx}$$

La esperanza de vida quedará como: $\boxed{\bar{e}_x = \frac{T_x}{l(x)}}$

Esto es: la cantidad de existencia a la edad x por el tamaño de la cohorte de esa edad: Es decir los años que les queda por vivir a la cohorte de edad x, repartidos igualitariamente entre todos sus efectivos.

Obviamente, si el valor de x es entero la integral podría igualarse a un número discreto de sumandos de integrales dando finalmente como resultado:

$$T_x = \int_0^1 l(x+t)dt + \int_1^2 l(x+t)dt + ... + \int_{\omega-x-1}^{\omega-x} l(x+t)dt =$$

$$\int_0^1 l(x+t)dt + \int_0^1 l(x+t+1)dt + ... + \int_0^{\omega-x-1} l(x+\omega-1)dt =$$

$$= L_x + L_{x+1} + ... + L_{\omega-x-1} = \sum_{k=x}^{\omega-1} L_k$$

En algunas ocasiones , ante un seguro de jubilación, por ejemplo, puede interesar calcular la **esperanza de vida** a una edad x **diferida** un tiempo t (hasta la jubilación por ejemplo):

$$\boxed{{}_{t/}\overline{e}_x = \overline{e}_{x+t} \cdot {}_t p_x = \frac{T_{x+t}}{l(x+t)} \frac{l(x+t)}{l(x)} = \frac{T_{x+t}}{l(x)}}$$

En otras puede interesar conocer la **esperanza de vida temporal** (si el seguro va a cubrir una cierta compensación hasta, por ejemplo, la jubilación).Se trata, en definitiva de conocer el número esperado de años que vivirá un sujeto de edad x en los próximos t y vendría dado por el número total de años vividos entre x y x+t por la totalidad de la cohorte divididos igualitariamente entre todos sus efectivos:

$$\boxed{{}_t\overline{e}_x = \frac{T_x - T_{x+t}}{l(x)} = \overline{e}_x - {}_{t/}\overline{e}_x}$$

Por último puede resultar de interés conocer una combinación de ambas: la **esperanza de vida diferida temporal**, o **esperanza de vida mixta**. En estos caso se tendrá interés en conocer el número de años que en promedio vivirá un sujeto de edad x entre los años x+n y x+n+t. Utilizando el mismo razonamiento por analogía será el cociente entre la cantidad de años vividos entre esas dos edades (x+n y x+n+t) y el número de individuos de edad x:

$$\boxed{{}_{n/t}\overline{e}_x = \frac{T_{x+n} - T_{x+n+t}}{l(x)} = {}_{n/}\overline{e}_x - {}_{n+t/}\overline{e}_x}$$

Multiplicando y dividiendo la expresión anterior por l(x+1) tendremos la expresión equivalente:

$${}_{n/t}\overline{e}_x = \frac{T_{x+n} - T_{x+n+t}}{l(x)} = \frac{l(x+n)}{l(x)} \frac{T_{x+n} - T_{x+n+t}}{l(x+n)} = {}_n p_x \cdot {}_t\overline{e}_{x+n}$$

Es decir que la esperanza de vida mixta o esperanza de vida a la edad x diferida n años y temporal t años será igual a la probabilidad de supervivencia temporal n años a la edad x por la esperanza de vida temporal t años a la edad x+n :

$$\boxed{{}_{n/t}\overline{e}_x = {}_n p_x \cdot {}_t\overline{e}_{x+n}}$$

Esperanza abreviada de vida.

En la práctica, es poco habitual que se disponga de información completa acerca de la función l(x), lo habitual es que sólo se conozcan los valores de los supervivientes de la cohorte para años enteros l_x y que sea a partir de esta información como haya que aproximarse a valorar los años que cabe esperar que le resten de vida a un asegurado.

Consideremos la situación: A partir de un efectivo de l_x individuos a la edad (entera) x, de ellos vivirán un año completo: l_{x+1}.Es decir, durante el primer año, el número de años completos que vivirán (entre todos) será: l_{x+1}.Para el segundo año tendremos que el número de personas que habrán vivido un año más será de l_{x+2}. Lo que supondrá que el número de años completos de vida que habrá que añadir a la colectividad será de l_{x+2}. Y así sucesivamente hasta llegar a la edad de la extinción de la cohorte.

Es decir que el grupo inicial de l_x individuos habrá vivido un número total de años completos de: $l_{x+1} + l_{x+2} + l_{x+3} + \ldots + l_\omega$. Y desde este razonamiento llegamos a que el número medio de años de viva completos vividos por el grupo inicial de superviventes a la la edad x (l_x) será, la llamada **esperanza abreviada de vida** o **vida media abreviada**, e_x.

$$\boxed{e_x = \frac{\sum_{i=1}^{\omega-x-1} l_{x+i}}{l_x}}$$

Que también puede expresarse en función de las probabilidades temporales de supervivencia como:

$$e_x = \frac{\sum_{i=1}^{\omega-x-1} l_{x+i}}{l_x} = \sum_{t=1}^{\omega-x-1} {}_t p_x \qquad \text{ya que : } {}_t p_x = \frac{l_{x+t}}{l_x}$$

Sin embargo la esperanza de vida así determinada está presuponiendo que la distribución de las defunciones a lo largo del año es de hecho de un naturaleza muy poco realista: suponemos que todos los fallecimiento se producen al inicio de cada año, ya que sólo los años enteros son susceptibles de ser escenario de fenómenos biométricos según esta manera de proceder.

Si asumimos, en cambio, una distribución uniforme , a lo largo del año , de las defunciones, bastante más realista, aunque también sea discutible es fácil llegar a la relación entre la esperanza calculada según el criterio anterior, e_x , y la esperanza de vida como que ésta debería ser, en tal supuesto ½ más la esperanza de vida abreviada.

Siguiendo este esquema argumentativo es como se suele obtener en la práctica el valor de la esperanza de vida en las estadísticas oficiales: Este valor (esperanza de vida bajo el supuesto de uniformidad), calculado a partir de la esperanza abreviada de vida recibe el nombre de **vida media completa** o **esperanza completa de vida**, e^0_x:

$$\boxed{e^0_x = \frac{1}{2} + e_x = \frac{1}{2} + \frac{\sum_{i=1}^{\omega-x-1} l_{x+i}}{l_x} = \frac{1}{2} + \sum_{t=1}^{\omega-x-1} {}_t p_x}$$

En cuanto a las esperanzas de vida (abreviada y completa) temporales, diferidas y mixtas podrán ser definidas de manera análoga. Ocurriendo también que las esperanzas de vida completas (temporales, diferidas y mixtas) coincidirán con la esperanza de vida en el supuesto de uniformidad:

En el siguiente cuadro se resumen todas estas posibilidades:

		diferida	temporal	
Esperanza de vida abreviada	$e_x = \frac{\sum_{i=1}^{\omega-x-1} l_{x+i}}{l_x} = \sum_{t=1}^{\omega-x-1} {}_t p_x$	${}_{t/}e_x = e_{x+t} \cdot {}_t p_x$	${}_t e_x = e_x - {}_{t/}e_x = e_x - {}_t p_x . e_{x+t}$	
Esperanza de vida completa	$e_x^0 = \frac{1}{2} + e_x$	${}_{t/}e_x^0 = e_{x+t}^0 \cdot {}_t p_x$	${}_t e_x^0 = e_x^0 - {}_{t/}e_x^0 = e_x^0 - {}_t p_x . e_{x+t}^0$	
Esperanza de vida	$\overline{e}_x = \frac{T_x}{l(x)}$	${}_{t/}\overline{e}_x = \overline{e}_{x+t} \cdot {}_t p_x$	${}_t \overline{e}_x = \overline{e}_x - {}_{t/}\overline{e}_x = \overline{e}_x - {}_t p_x . \overline{e}_{x+t}$	

Vida probable es otro indicador del número de años de vida que le restan aproximadamente a un individuo de edad x. Se la edad a la que se igualan las probabilidades de sobrevivir y de fallecer de un individuo de edad x: Es el valor de t que cumple que : ${}_tp_x={}_tq_x=0.5$.

Es por lo tanto la mediana de la distribución de probabilidad de la variable vida residual T(x)= X-x . Equivalentemente la vida probable V_x se puede ver como el tiempo necesario para que la cohorte l(x) pierda la mitad de sus individuos:

l(x+v)=l(x)/2

Generalización de probabilidades de supervivencia y mortalidad para dos o más cabezas. Distribuciones conjuntas.

Las probabilidades temporales de fallecimiento y supervivencia para dos o más cabezas $\left({}_t p_{xy} \quad {}_t q_{xy} \quad {}_t q_{\overline{xy}} \quad {}_t p_{\overline{xy}} \quad {}_t p^{[1]}_{\overline{xy}} \quad {}_t q^{[1]}_{\overline{xy}}, {}_t p_{xyz} \quad {}_t q_{xyz} \quad {}_t q_{\overline{xyz}} \quad {}_t p_{\overline{xyz}} \quad {}_t p^{[1]}_{\overline{xyz}} \quad {}_t p^{[2]}_{\overline{xyz}} \quad {}_t q^{1}_{\overline{xyz}} \quad {}_t p^{2}_{\overline{xyz}}, etc \right)$ se comportarán de manera análoga al caso discreto ya estudiado siempre que sigamos manteniendo la hipótesis de independencia , si bien aquí los valores del intervalo temporal considerado no tienen porque ser años enteros. En definitiva se podrán obtener recurriendo a las probabilidades individuales y éstas acabaran pudiéndose calcular para cualquier valor de t en función de las “funciones” biométricas.

Sin embargo como en el caso de considerar el tiempo biométrico como una variable continua nos aparecen funciones biométricas nuevas debemos estudiar su comportamiento en el caso de contar con más de una cabeza. Analizaremos el comportamiento del *tanto instantáneo de fallecimiento* y de la *esperanza de vida* y su relación con las probabilidades para dos o más cabezas y para ello estudiaremos primero la llamada **vida residual conjunta** de un grupo de varias cabezas:

Vida residual conjunta:

Llamaremos vida residual conjunta a la variable aleatoria << tiempo que “permanecerá” el grupo hasta su disolución>>. Dada una pareja de edades x,y la vida residual conjunta será: T(x,y) , (Abreviadamente, T_{xy}) ; dado un grupo de m individuos $T(x_1,x_2,\ldots,x_m)$ o $T_{x_1,x_2,\ldots,x_m}$.
La relación entre la vida residual conjunta y las vidas residuales individuales es sencilla porque el grupo se disuelve cuando fallece el primer individuo por lo tanto:

$$\boxed{T(x,y)= \min (T(x),T(y)) \quad \text{o bien para m :} \quad T(x_1,x_2,\ldots,x_m)= \min (T(x_1),T(x_2),\ldots T(x_m))}$$

Función de distribución de la vida residual conjunta:

$$F_{T_{xy}}(t) = P(T_{xy} \le t) = {}_t q_{xy} = 1 - {}_t p_{xy}$$

Puesto que ${}_t q_{xy}$ es la probabilidad de que el grupo se disuelva en un tiempo inferior o igual a t y por tanto la probabilidad de que la “minima de las vidas residuales “ sea inferior o igual a t. Y, también tenemos que:

$$F_{T_{xy}}(t) = P(T_{xy} \le t) = P\Big(\big(\min\big(T(x),T(y)\big)\big) \le t\Big) = 1 - P\Big(\big(\min\big(T(x),T(y)\big)\big) > t\Big) = 1 - S_{T_{x,y}}(t)$$

En donde la función $S_{T_{x,y}}(t)$ es la función de supervivencia asociada al mínimo de las variables T(x) y T(y) .— que no debe confundirse con la f.de supervivencia conjunta.

Retomando la primera expresión y considerando que la condición para el mínimo de T(x), T(y) es equivalente al suceso “O bien T(x) o bien T(y)” y operando con los teoremas básicos del cálculo de probabilidades de sucesos, tendremos:

$$F_{T_{xy}}(t) = P(T_{xy} \le t) = P\left(\left(\min\left(T(x),T(y)\right)\right) \le t\right) = P\left((T(x) \le t) \cup (T(y) \le t)\right) =$$
$$= P(T(x) \le t) + P(T(y) \le t) - P\left((T(x) \le t) \cap (T(y) \le t)\right) =$$
$$= {}_t q_x + {}_t q_y - {}_t q_{\overline{xy}}$$

Y como por otra lado teníamos que $F_{T_{xy}}(t) = {}_t q_{xy}$, tendremos que :

$$\boxed{{}_t q_{xy} = {}_t q_x + {}_t q_y - {}_t q_{\overline{xy}}}$$

Función de densidad de la vida residual conjunta la podremos obtener derivando la F. de distribución:

$$f_{T_{xy}}(t) = \frac{d}{dt} F_{T_{xy}}(t) = \frac{d}{dt}\left(1 - {}_t p_{xy}\right) = \frac{d}{dt}\left(1 - {}_t p_x \cdot {}_t p_y\right) = -\frac{d}{dt}\left({}_t p_x \cdot {}_t p_y\right) =$$
$$= f_{T_{xy}}(t) = -\left(\frac{d\, {}_t p_x}{dt} \cdot {}_t p_y + \frac{d\, {}_t p_y}{dt} \cdot {}_t p_x\right)$$

Ahora bien la derivada del “tanto de supervivencia” (de cada cabeza) puede reescribirse en función del tanto instantáneo de mortalidad (de cada cabeza):

$$\frac{d\, {}_t p_x}{dt} = -{}_t p_x . \mu(x+t)$$
$$\frac{d\, {}_t p_y}{dt} = -{}_t p_y . \mu(y+t)$$

De forma que, sustituyendo:

$$f_{T_{xy}}(t) = \left(\left({}_t p_x \cdot {}_t p_y . \mu(y+t)\right) + \left({}_t p_y \cdot {}_t p_x . \mu(x+t)\right)\right) =$$
$$f_{T_{xy}}(t) = {}_t p_{xy} . \left(\mu(x+t) + \mu(y+t)\right)$$

Puede probarse que bajo el supuesto de independencia, que siempre estamos considerando el llamado **tanto instantáneo de mortalidad conjunta** es igual a la suma de los tantos instantáneos de mortalidad individuales, esto es:

$$\mu(x,y) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta_t q_{xy}}{\Delta t} = \mu(x) + \mu(y) \quad \varsigma$$

Como, por un lado: $f_{T_{xy}}(t) = {}_t p_{xy} . \left(\mu(x+t) + \mu(y+t)\right)$

Y por otro: ${}_t p_{xy} = 1 - F_{T_{xy}}(t)$

Sustituyendo, tendremos que :

$$\boxed{\mu(x+t, y+t) = \mu(x+t) + \mu(y+t) = \frac{1}{(1 - F_{T_{xy}}(t))} . f_{T_{xy}}(t) \quad \varsigma}$$

El tanto instantáneo de fallecimiento conjunto también se puede escribir en función de la probabilidad de supervivencia conjunta o bien de la función de cohorte:

- Tanto instantáneo en función de la probabilidad de supervivencia conjunta:

Como: ${}_t p_{xy} = 1 - F_{T_{xy}}(t)$,

Derivando:

$$\frac{d}{dt}\left({}_t p_{xy}\right) = \frac{d}{dt}\left(1 - F_{T_{xy}}(t)\right) = -f_{T_{xy}}(t)$$

Y por lo tanto:

$$\boxed{\mu(x,y) = \frac{1}{(1 - F_{T_{xy}}(t))} . f_{T_{xy}}(t) = -\frac{\frac{d}{dt}\,{}_t p_{xy}}{{}_t p_{xy}}}$$

- Tanto instantáneo en función de la función de cohorte:

Como:

$${}_t p_{xy} = \frac{l(x+t, y+t)}{l(x,y)} \quad \text{y derivando:} \quad \frac{d}{dt}\left({}_t p_{xy}\right) = \frac{\frac{d}{dt}\left[l(x+t, y+t)\right]}{l(x,y)}$$

Sustituyendo probabilidad de supervivencia conjunta y su derivada en la expresión del tanto instantáneo:

$$\mu(x,y) = -\frac{\frac{d}{dt}\,{}_t p_{xy}}{{}_t p_{xy}} = -\frac{\frac{\frac{d}{dt}\left[l(x+t, y+t)\right]}{l(x,y)}}{\frac{l(x+t, y+t)}{l(x,y)}} = -\frac{\frac{d}{dt}\left[l(x+t, y+t)\right]}{l(x+t, y+t)}$$

Nótese que como, por otro lado, la función de distribución de de la vida residual conjunta no es otra cosa que la probabilidad de disolución, tenderemos que ésta también podrá expresarse en función del tanto instantáneo como:

$$\boxed{{}_n q_{xy} = F_{T_{xy}}(n) = \int_0^n f_{T_{xy}}(t)dt = \int_0^n {}_t p_{xy}\,\mu(x+t, y+t)dt}$$

De forma muy similar se pueden obtener las expresiones de otras probabilidades en función de los tantos instantáneos conjuntos y/o individuales.

Vida residual del grupo hasta la extinción

De análoga forma a lo desarrollado para la vida residual conjunta podemos ahora considerar la vida residual hasta la extinción del grupo $T\left(\overline{x,y}\right)$,o bien, $T_{\overline{x,y}}$

Que no será otra cosa que la variable aleatoria : "tiempo que resta (desde las edades x e y) para la extinción del grupo":

$T_{\overline{x,y}} = \max\left(T(x),T(y)\right)$ o para grupos de m individuos:

$T_{\overline{x_1,x_2,\dots,x_m}} = \max\left(T(x_1),T(x_2),\dots,T(x_m)\right)$

Puede probarse fácilmente que :

$$\boxed{\begin{aligned} T_{\overline{x,y}} + T_{x,y} &= T(x)+T(y) \\ T_{\overline{x,y}}.T_{x,y} &= T(x).T(y) \end{aligned}}$$

La **función de distribución** de la variable vida residual para la extinción vendrá dada por:

$$F_{T_{\overline{xy}}}(t) = P(T_{\overline{xy}} \le t) = {}_t q_{\overline{xy}} = {}_t q_x \cdot {}_t q_y$$

La **función de densidad** la obtendremos derivando:

$$f_{T_{\overline{xy}}}(t) = \frac{d}{dt} F_{T_{\overline{xy}}}(t) = \frac{d}{dt}\left({}_t q_x \cdot {}_t q_y\right) = {}_t q_x \cdot \frac{d}{dt}\,{}_t q_y + {}_t q_y \,\frac{d}{dt}\,{}_t q_x =$$

$$= {}_t q_x \cdot \frac{d}{dt}(1-{}_t p_y) + {}_t q_y \,\frac{d}{dt}(1-{}_t p_x) =$$

$$= \boxed{f_{T_{\overline{xy}}}(t) = {}_t q_x \cdot {}_t p_y .\mu(y+t) + {}_t q_y \cdot {}_t p_x .\mu(x+t)}$$

Esperanza de vida conjunta hasta la disolución

Es la esperanza de la variable vida residual conjunta hasta la disolución y da cuenta del tiempo que de "media" tardará el grupo en disolverse (el tiempo que tardará por término medio en fallecer el primer individuo):

$$\overline{e}_{xy} = E[T_{xy}] = \int_0^\infty t.\,f_{T_{xy}}(t)dt = \int_0^\infty t.\,{}_t p_{xy}.\mu(x+t,y+t)\;dt$$

Basándonos en la relación entre el tanto instantáneo conjunto y la función de cohorte conjunta , sustituyendo e integrando por partes puede llegarse a una expresión de estimación de la misma muy similar a la considerada en otros casos (cantidad de vida dividida por cohorte) :

$$\boxed{\overline{e}_{xy} = \frac{\int_0^\infty l(x+t,y+t)\;dt}{l(x,y)}}$$

Con una **esperanza de vida conjunta abreviada** de :

$$e_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} l(x+i+1, y+i+1)}{l(x,y)} = \sum_{t=1}^{\infty} {}_t p_{xy}$$

Y con una **esperanza de vida conjunta completa**:

$$\overset{0}{e}_{xy} = \frac{1}{2} + \sum_{t=1}^{\infty} {}_t p_{xy} = \frac{1}{2} e_{xy}$$

Esperanza de vida conjunta hasta la extinción

Ahora será la esperanza de la variable vida residual hasta la extinción:

$$\overline{e}_{\overline{xy}} = E[T_{\overline{xy}}] = \int_0^{\infty} t.f_{T_{\overline{xy}}}(t)dt = \int_0^{\infty} t.{}_t q_x \cdot {}_t p_y.\mu(y+t)dt + \int_0^{\infty} t.{}_t q_y \cdot {}_t p_x.\mu(x+t)dt$$

Sustituyendo las probabilidades temporales de fallecimiento, ${}_t q_x$ y ${}_t q_y$, por:
(1- ${}_t p_x$) y (1-${}_t p_y$) respectivamente obtendremos:

$$\overline{e}_{\overline{xy}} = \int_0^{\infty} t.{}_t p_y.\mu(y+t)dt - \int_0^{\infty} t.{}_t p_y \cdot {}_t p_x.\mu(y+t)dt +$$

$$+ \int_0^{\infty} t.{}_t p_x.\mu(x+t)dt - \int_0^{\infty} t.{}_t p_y \cdot {}_t p_x.\mu(x+t)dt =$$

$$\overline{e}_{\overline{xy}} = \overline{e}_x + \overline{e}_y - \overline{e}_{xy}$$

Es decir la esperanza de vida conjunta hasta la extinción serán los años que le restan vivir (en promedio) a x más los que les restan a y menos los que en promedio vivirán en común (que han sido contabilizados dos veces)

Podemos, también, escribir la esperanza de vida hasta la extinción en función de las probabilidades de supervivencia temporal como:

$$\overline{e}_x = \int_o^{\infty} {}_t p_x dt \qquad \overline{e}_y = \int_o^{\infty} {}_t p_y dt \qquad \overline{e}_{xy} = \int_o^{\infty} {}_t p_{xy} dt$$

de forma que : $\overline{e}_{\overline{xy}} = \overline{e}_x + \overline{e}_y - \overline{e}_{xy} = \int_0^{\infty} ({}_t p_x + {}_t p_y - {}_t p_{xy})dt = \int_0^{\infty} {}_t p_{\overline{xy}}\, dt$

Las correspondientes esperanza de vidas hasta la extinción **abreviada** y **completa** quedarán como:

$$e_{\overline{xy}} = e_x + e_y - e_{xy} = \sum_{i=1}^{\infty} {}_t p_x + \sum_{i=1}^{\infty} {}_t p_y - \sum_{i=1}^{\infty} {}_t p_{xy} = \sum_{i=1}^{\infty} {}_t p_{\overline{xy}}$$

$$\overset{0}{e}_{\overline{xy}} = \overset{0}{e}_x + \overset{0}{e}_y - \overset{0}{e}_{xy} = \frac{1}{2} + e_x + \frac{1}{2} + e_y - \frac{1}{2} - e_{xy} = \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} {}_t p_{\overline{xy}}$$