Estadística Avanzada Actuarios

Breviario 1. Tema 5.

X =edad de fallecimiento

T(x)=(X-x) **Vida Residual** individuo de x años , años hasta fallecer habiendo cumplido x

función de distribución

$$G_x(t) = P((X \le x+t) \mid (X > x)) = \frac{P(x < X \le x+t)}{P(X > x)} = \frac{F(x+t) - F(x)}{1 - F(x)}$$

función de densidad

$$g_x(t) = \frac{\partial}{\partial t} G_x(t) = \frac{f(x+t)}{1 - F(x)}$$

Función de supervivencia

$$S(x) = P(X > x) = 1 - F(x)$$

Probabilidad temporal de fallecimiento

$$_h q_x = P((X \le x+h) \mid (X > x)) = \frac{P(x < X \le x+h)}{P(X > x)} = \frac{F(x+h) - F(x)}{1 - F(x)}$$

$$G_x(t) = P((X \le x+t) \mid (X > x)) = {}_t q_x$$

Probabilidad temporal de supervivencia

$$_h p_x = P((X > x+h) \mid (X > x)) = \frac{P(X > x+h)}{P(X > x)} = \frac{1 - F(x+h)}{1 - F(x)} = \frac{S(x+h)}{S(x)}$$

años enteros $_n p_x = \prod_{i=0}^{n-1} p_{x+i}$ escindibilidad

años no enteros y k<h

$$_h p_x = {}_k p_x \cdot {}_{h-k} p_{x+k}$$

para mortalidad y k<h

$$_h q_x = {}_k q_x + {}_k p_x \cdot {}_{(h-k)} q_{(x+k)}$$

Probabilidad diferida de fallecimiento de edad X sobreviva hasta X+M y fallezca antes de X+M+n

$$ {}_{m/n}q_x = \frac{P(x+m < X < x+m+n)}{P(X > x)} $$

1.-

$$ {}_{m/n}q_x = \frac{F(x+m+n) - F(x+m)}{1 - F(x)} = \frac{S(x+m) - S(x+m+n)}{S(x)} $$

2.-

$$ {}_{m/n}q_x = {}_{m}p_x \cdot {}_{n}q_{x+m} $$

3.-

$$ {}_{m/n}q_x = {}_{m+n}q_x - {}_{m}q_x $$

4.-

$$ {}_{m/n}q_x = {}_{m}p_x - {}_{m+n}p_x $$

Función de cohorte-Función de supervivientes

$$ l(x) = E(\mathcal{L}(x)) = l_0 \, .S(x) $$

Tanto instantáneo de mortalidad

$$ \mu_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta_t q_x}{\Delta t} $$

$$ = \frac{1}{(1 - F(x))} . f(x) = -\frac{S'(x)}{S(x)} = -\frac{d}{dx} \ln(S(x)) $$

$$ \mu_x = -\frac{l'(x)}{l(x)} = -\frac{d}{dx} \ln l(x) $$

Relaciones biométricas.

	f(x)	F(x)	S(x)	μ(x)	l(x)
f(x)		F'(x)	-S'(x)	$\mu(x).e^{-\int_0^x \mu(y)dy}$	$\frac{-l'(x)}{l_0}$
F(x)	$\int_0^x f(y)dy$		1-S(x)	$1-e^{-\int_0^x \mu(y)dy}$	$1-\frac{l(x)}{l_0}$
S(x)	$\int_x^\infty f(y)dy$	1-F(x)		$e^{-\int_0^x \mu(y)dy}$	$\frac{l(x)}{l_0}$
μ(x)	$\frac{f(x)}{1-\int_0^x f(y)dy}$	$\frac{F'(x)}{1-F(x)}$	$-\frac{S'(x)}{S(x)}=-\frac{d}{dx}\ln S(x)$		$-\frac{l'(x)}{l(x)}=-\frac{d}{dx}\ln l(x)$
l(x)	$l_0.(1-\int_0^x f(y)dy)$	$l_0.(1-F(x))$	$l_0.S(x)$	$l_0.e^{-\int_0^x \mu(y)dy}$	

Defunciones

periodo de x a x+h : ${}_hd_x=l(x)-l(x+h)$

$$ {}_hd_x = \int_0^h l(x+t)\mu(x+t)dt = \int_0^h l(x+t)\left(-\frac{l'(x+t)}{l(x+t)}\right)dt = $$

$$ = \int_0^h -l'(x+t)dt = l(x+h)-l(x) = {}_hd_x $$

también $d_x = l_0(S(x)-S(x+1))$

Tanto anual de supervivencia y Tanto anual de mortalidad

$$ {}_t p_x = \frac{l(x+t)}{l(x)} $$ Tanto t de supervivencia

$$ {}_t q_x = \frac{{}_t d_x}{l(x)} = \frac{l(x) - l(x+t)}{l(x)} $$ Tanto t de mortalidad

$$ p_x = \frac{l(x+1)}{l(x)} = \frac{l_{x+1}}{l_x} \text{ tanto anual de supervivencia} $$

$$ q_x = \frac{d_x}{l(x)} = \frac{l(x) - l(x+1)}{l(x)} = \frac{d_x}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} \text{ tanto anual de mortalidad} $$

Tanto CENTRAL de mortalidad

$$ m_x = \frac{d_x}{L_x} $$

Lx = individuos que viven en un momento la edad x, FUNCIÓN CENSAL DE SUPERVIVENCIA, promedio de individuos vivos a lo largo de la edad x
número de años que viven, en el transcurso de un año , un colectivo de supervivientes de edad x, lx

$$ L_x = \int_0^1 l(x+t)\,dt $$

distribuyendo los fallecidos uniformemente a lo largo del año:

$$ L_x = \int_0^1 l(x+t)\,dt = \int_0^1 (l_x - t\,d_x)\,dt = l_x t\Big]_0^1 - d_x \frac{t^2}{2}\Big]_0^1 = l_x - \frac{d_x}{2} = l_{x+1} + \frac{d_x}{2}, $$

en base a esto

$$ m_x = \frac{d_x}{L_x} = \frac{d_x}{l_x - \frac{d_x}{2}} = \frac{d_x / l_x}{1 - \frac{d_x}{2 l_x}} = \frac{q_x}{1 - \frac{q_x}{2}} = \boxed{m_x = \frac{2 q_x}{2 - q_x}} $$

así Tanto anual de fallecimiento

$$q_x = \frac{2m_x}{2+m_x}$$

y Tanto anual de supervivencia.

$$p_x = \frac{2-m_x}{2+m_x}$$

Esperanza de vida

$$\overline{e}_x = E(T(x)) = \int_0^{\omega-x} t.g_x(t)dt$$

en base a VIDA RESIDUAL

$$\int_0^{\omega-x} t \cdot {}_t p_x \cdot \mu(x+t)dt$$

en base a TANTO INSTANTÁNEO DE MORTALIDAD

$$\overline{e}_x = \int_0^{\omega-x} {}_t p_x \, dt$$

en base a la PROBABILIDAD TEMPORAL DE SUPERVIVENCIA

$$\overline{e}_x = \int_0^{w-x} \frac{s(x+t)}{S(x)} dt$$

$$\bar{e}_x = \int_0^{\omega-x} {}_t p_p \, dt = \int_0^{\omega-x} \frac{l_{x+t}}{l_x} dt =$$

$$\overline{e}_x = \frac{T_x}{l(x)}$$

en base a la CANTIDAD DE EXISTENCIA T Y EL TAMAÑO DE LA COHORTE
T = número de años vivirá la cohorte de edad x

$$T_x = L_x + L_{x+1} + \ldots + L_{\omega-x-1} = \sum_{k=x}^{\omega-1} L_k$$

Esperanza de vida diferida esperanza de vida de una persona de edad X cuando tenga t más

$$ {}_{t/}\bar{e}_x = \bar{e}_{x+t} \cdot {}_t p_x = \frac{T_{x+t}}{l(x+t)} \frac{l(x+t)}{l(x)} = \frac{T_{x+t}}{l(x)} $$

Esperanza de vida temporal esperanza de vida de una persona de edad X en los próximos t

$$ {}_t\bar{e}_x = \frac{T_x - T_{x+t}}{l(x)} = \bar{e}_x - {}_{t/}\bar{e}_x $$

Esperanza de vida mixta (diferida n años y temporal t años)

$$ {}_{n/t}\bar{e}_x = \frac{T_{x+n} - T_{x+n+t}}{l(x)} = {}_{n/}\bar{e}_x - {}_{n+t/}\bar{e}_x $$

o bien $\quad {}_{n/t}\bar{e}_x = {}_n p_x \cdot {}_t\bar{e}_{x+n}$

Esperanza abreviada de vida (vida media abreviada) sin tilde

$$ e_x = \frac{\sum_{i=1}^{\omega-x-1} l_{x+i}}{l_x} = \sum_{t=1}^{\omega-x-1} {}_t p_x \qquad \text{ya que : } {}_t p_x = \frac{l_{x+t}}{l_x} $$

se supone fallecimientos a principio de cada año

Esperanza completa de vida (vida media completa) sin tilde

$$ e_x^0 = \frac{1}{2} + e_x = \frac{1}{2} + \frac{\sum_{i=1}^{\omega-x-1} l_{x+i}}{l_x} = \frac{1}{2} + \sum_{t=1}^{\omega-x-1} {}_t p_x $$

Se supone fallecimientos uniformes a lo largo del año

Vida probable V_x

La mediana de T(x)=X-x vida residual

$${}_tP_x = {}_tq_x = 0,5$$

o tiempo hasta la cohorte x pierda a la mitad de sus miembros $l(x\text{-}v)=l(x)/2$