Vida residual conjunta $T_{x, y, z,\ldots}$

Tiempo permanecerá el grupo hasta la **disolución**, es una variable aleatoria. relacionada con la vida residual de cada individuo

$$T(x,y)= \min (T(x),T(y)) \quad \text{o bien para m :} \quad T(x_1,x_2,\ldots,x_m)= \min (T(x_1),T(x_2),\ldots\ T(x_m))$$

manera que si la vida residual del individuo de edad X es 20, y la del individuo de edad Y es 40, lógicamente la vida residual conjunta será el mínimo de los dos, es decir , 20.. Vida residual conjunta, $\mathbf{T_{x, y} =T(x,y)=20}$

$T_{x,y}$ como tal variable aleatoria tendrá valores X e Y conocidos, edades. Y en base a t , tiempo. Por tanto su función de distribución será:

Su función de distribución será :

$$F_{T_{xy}}(t) = P(T_{xy} \leq t) = {}_tq_{xy} = 1 - {}_tp_{xy}$$ o bien

$$F_{T_{xy}}(t) = P(T_{xy} \leq t) = P\Big(\big(\min\big(T(x), T(y)\big)\big) \leq t\Big) =$$
$$= 1 - P\Big(\big(\min\big(T(x), T(y)\big)\big) > t\Big) = 1 - S_{T_{x,y}}(t)$$

Donde $S_{T_{x,y}}(t)$ Es la función de supervivencia asociada al mínimo de las T

Hallar la probabilidad de que la vida residual conjunta de una pareja de 30 y 40 años sea inferior a 30 años. Sabiendo que ${}_{30}p_{30}$=0,87 y ${}_{30}p_{40}$=0,84

$$ {}_{t}p_{x} = {}_{30}p_{30} = 0{,}87 \qquad {}_{t}p_{x} = {}_{30}p_{40} = 0{,}84 $$

$$ F_{T_{40,30}}(30) = {}_{30}q_{40,30} = 1 - {}_{30}p_{40,30} = 1 - ({}_{30}p_{40} \cdot {}_{30}p_{30}) = 1 - 0{,}7308 = 0{,}2692 $$

Desarrollando en base a probabilidad de la unión de sucesos

$$ F_{T_{xy}}(t) = P(T_{xy} \le t) = P\left(\left(\min\left(T(x),T(y)\right)\right) \le t\right) = P\left((T(x) \le t) \cup (T(y) \le t)\right) = $$

$$ = P(T(x) \le t) + P(T(y) \le t) - P\left((T(x) \le t) \cap (T(y) \le t)\right) = $$

$$ = {}_{t}q_{x} + {}_{t}q_{y} - {}_{t}q_{\overline{xy}} $$

$$ F_{T_{xy}}(t) = {}_{t}q_{xy} = {}_{t}q_{x} + {}_{t}q_{y} - {}_{t}q_{\overline{xy}} $$

Si l(x)=100-x para 0<x<100

Calcular la probabilidad de que la vida residual conjunta sea inferior a 30 para un grupo de dos personas una de 40 años y la otra de 50

$$ {}_{t}p_{x} = \frac{l(x+t)}{l(x)} = \frac{100-(x+t)}{100-x} = 1 - \frac{t}{100-x} $$

$$ {}_{30}p_{50} = \frac{l(x+t)}{l(x)} = \frac{100-(x+t)}{100-x} = 1 - \frac{30}{50} = 1 - 0,6 = 0,4 $$

$$ {}_{30}p_{40} = \frac{l(x+t)}{l(x)} = \frac{100-(x+t)}{100-x} = 1 - \frac{30}{60} = 1 - 0,5 = 0,5 $$

$$ {}_{30}p_{40,50} = {}_{30}p_{40} \cdot {}_{30}p_{50} = 0,5 \cdot 0,4 = 0,2 $$

$$ F_{T_{50,40}}(t=30) = {}_{30}q_{40,50} = 1 - {}_{30}p_{40} \cdot {}_{30}p_{50} = 1 - 0,2 = 0,8 $$

Otras formas

$$ {}_tq_{xy} = {}_tq_x + {}_tq_y - {}_tq_{\overline{xy}} $$

$$ {}_{30}q_{40,50} = {}_{30}q_{40} + {}_{30}q_{50} - {}_{30}q_{\overline{40,50}} = (1-0,5)+(1-0,4) - {}_tq_{\overline{xy}} $$

extinción $\quad {}_tq_{\overline{xy}} = 1-(no\, extinción) = 1 - {}_tp_{\overline{xy}}$

$$ {}_{30}p_{\overline{40,50}} = {}_{30}p_{40} + {}_{30}p_{50} - {}_{30}p_{40} \cdot {}_{30}p_{50} = 0,5+0,4-0,2 = 0,7 $$

$$ {}_{30}q_{\overline{40,50}} = 1 - {}_{30}p_{\overline{40,50}} = 1-0,7 = 0,3 $$

$$ F_{T_{40,50}}(t=30) = {}_{30}q_{40} + {}_{30}q_{50} - {}_{30}q_{\overline{40,50}} = (1-0,5)+(1-0,4)-0,3 = $$

$$ F_{T_{40,50}}(t=30) = 0,8 $$

Función de densidad de la vida residual conjunta

derivando $\quad F_{T_{xy}}(t)$

$$ f_{T_{xy}}(t) = \frac{d}{dt}F_{T_{xy}}(t) = \frac{d}{dt}\left(1 - {}_tp_{xy}\right) = \frac{d}{dt}\left(1 - {}_tp_x \cdot {}_tp_y\right) = -\frac{d}{dt}\left({}_tp_x \cdot {}_tp_y\right) = $$

$$ = f_{T_{xy}}(t) = -\left(\frac{d\,{}_tp_x}{dt} \cdot {}_tp_y + \frac{d\,{}_tp_y}{dt} \cdot {}_tp_x\right) $$

Como en base a tanto instantáneo de mortalidad

$$\frac{d\ {}_tp_x}{dt} = -{}_tp_x.\mu(x+t)$$

$$\frac{d\ {}_tp_y}{dt} = -{}_tp_y.\mu(y+t)$$

$$f_{T_{xy}}(t) = \left(\left({}_tp_x \cdot {}_tp_y.\mu(y+t)\right) + \left({}_tp_y \cdot {}_tp_x.\mu(x+t)\right)\right) =$$

$$f_{T_{xy}}(t) = {}_tp_{xy}.\left(\mu(x+t) + \mu(y+t)\right)$$

Conocemos que el tanto instantáneo de mortalidad conjunto
es igual a la suma de los tantos instantáneos individuales

$$\mu(x+t, y+t) = \mu(x+t) + \mu(y+t)$$

a)Establecer **la función** de probabilidad de supervivencia conjunta
para un individuos de 40 y otro 50 , en base a **ella** volver a hallar la probabilidad de que
vida residual conjunta sea inferior a 10 años, con Si l(x)=100-x para 0<x<100

$$ {}_t p_x = \frac{l(x+t)}{l(x)} = \frac{100-(x+t)}{100-x} = 1 - \frac{t}{100-x} $$

$$ {}_t p_{40} = 1 - \frac{t}{100-40} = 1 - \frac{t}{60} \qquad {}_t p_{50} = 1 - \frac{t}{100-50} = 1 - \frac{t}{50} $$

$$ {}_t p_{40,50} = {}_t p_{40} \cdot {}_t p_{50} = \left(1 - \frac{t}{60}\right) \cdot \left(1 - \frac{t}{50}\right) = 1 - \frac{t}{60} - \frac{t}{50} + \frac{t^2}{3000} = $$

$$ = 1 - \frac{110t}{3000} + \frac{t^2}{3000} \quad si \;\; t = 30 \rightarrow {}_{30} p_{40,50} = 1 - \frac{3300}{3000} + \frac{900}{3000} = $$

$$ = 1 - 1{,}1 + 0{,}3 = 0{,}2 \;\; \Rightarrow {}_t q_{40,50} = 1 - {}_t p_{40,50} = 1 - 0{,}2 = 0{,}8 = F_{T_{40,50}}(t = 30) $$

Tanto instantáneo conjunto en función de la probabilidad de supervivencia conjunta

Como: $\quad {}_{t}p_{xy} = 1 - F_{T_{xy}}(t)$,

Derivando:

$$\frac{d}{dt}\left({}_{t}p_{xy}\right) = \frac{d}{dt}\left(1 - F_{T_{xy}}(t)\right) = -f_{T_{xy}}(t)$$

Y por lo tanto:

$$\boxed{\mu(x,y) = \frac{1}{(1 - F_{T_{xy}}(t))} . f_{T_{xy}}(t) = -\frac{\frac{d}{dt}\,{}_{t}p_{xy}}{{}_{t}p_{xy}}}$$

b) En base a la función de supervivencia conjunta para individuos de 40 y 50 años, de antes, calcular el tanto instantáneo para t=30

$$ {}_t p_{40,50} = 1 - \frac{110t}{3000} + \frac{t^2}{3000} $$

$$ \mu(40,50) = -\frac{\frac{d}{dt}\, {}_t p_{40,50}}{{}_t p_{40,50}} = \frac{-\left(-\frac{110}{3000} + \frac{2t}{3000}\right)}{\frac{3000}{3000} - \frac{110t}{3000} + \frac{t^2}{3000}} = \frac{110 - 2t}{3000 - 110t + t^2} $$

$$ si\ t = 30 \quad \mu(40+t, 50+t) = \frac{110-60}{3000-3300+900} = \frac{50}{600} = 0{,}08333 = \mu(40+t) + \mu(50+t) $$

c) Comprobar que para t =30

$$ \mu(x+t, y+t) = \mu(x+t) + \mu(y+t) $$

recordemos que l(x)=100-x 0<x<100

$$\mu(x) = -\frac{l'(x)}{l(x)} = -\frac{-1}{100-x} = \frac{1}{100-x} \quad \Rightarrow \textit{ para un incremento de t}$$

$$\mu(x+t) = \frac{1}{100-x-t} \quad \textit{así} \quad \mu(40+t) = \frac{1}{100-40-t} = \frac{1}{60-t}$$

$$\mu(50+t) = \frac{1}{100-50-t} = \frac{1}{50-t} \quad \textit{conjunta}$$

$$\mu(40+t, 50+t) = \mu(40+t) + \mu(50+t) \quad \textit{si } t = 30$$

$$\mu(40+t, 50+t) = \frac{1}{60-t} + \frac{1}{50-t} = \frac{1}{30} + \frac{1}{20} = 0,08333$$

Tanto instantáneo y probabilidad de disolución en función de la función de cohorte

Como:

$${}_t p_{xy} = \frac{l(x+t, y+t)}{l(x,y)} \quad \text{y derivando:} \quad \frac{d}{dt}\left({}_t p_{xy}\right) = \frac{\frac{d}{dt}\left[l(x+t, y+t)\right]}{l(x,y)}$$

Sustituyendo probabilidad de supervivencia conjunta y su derivada en la expresión del tanto instantáneo:

$$\mu(x,y) = -\frac{\frac{d}{dt}\,{}_t p_{xy}}{{}_t p_{xy}} = -\frac{\dfrac{\frac{d}{dt}\left[l(x+t, y+t)\right]}{l(x,y)}}{\dfrac{l(x+t, y+t)}{l(x,y)}} = -\frac{\frac{d}{dt}\left[l(x+t, y+t)\right]}{l(x+t, y+t)}$$

Nótese que como, por otro lado, la función de distribución de la vida residual conjunta no es otra cosa que la probabilidad de disolución, tenderemos que ésta también podrá expresarse en función del tanto instantáneo como:

$$\boxed{{}_n q_{xy} = F_{T_{xy}}(n) = \int_0^n f_{T_{xy}}(t)\,dt = \int_0^n {}_t p_{xy}\,\mu(x+t, y+t)\,dt}$$

d) En base a la expresión anterior calcular la probabilidad de que la vida residual conjunta sea inferior a 30 años (otra vez)

Recordemos que antes

$$ {}_t p_x = \frac{l(x+t)}{l(x)} = \frac{100-(x+t)}{100-x} = 1 - \frac{t}{100-x} $$

$$ \mu(x+t) = \frac{1}{100-x-t} \quad así \quad \mu(40+t) = \frac{1}{100-40-t} = \frac{1}{60-t} $$

$$ \mu(50+t) = \frac{1}{100-50-t} = \frac{1}{50-t} $$

$$ F_{T_{40,50}}(t=30) = {}_t q_{40,50} = \int_0^{30} {}_t p_{40,50} \cdot (\mu(40+t) + \mu(50+t) dt = $$

$$ = \int_0^{30} \cdot {}_t p_{40} \cdot {}_t p_{50} (\mu(40+t) + \mu(50+t) dt = \int_0^{30} \left(1 - \frac{t}{60}\right) \cdot \left(1 - \frac{t}{50}\right) \left(\frac{1}{60-t} + \frac{1}{50-t}\right) dt = $$

$$ = \int_0^{30} \left(1 - \frac{t}{60}\right) \cdot \left(1 - \frac{t}{50}\right) \left(\frac{50-t+60-t}{(60-t)\cdot(50-t)}\right) dt = \frac{1}{60 \cdot 50} \int_0^{30} (60-t) \cdot (50-t) \left(\frac{50-t+60-t}{(60-t)\cdot(50-t)}\right) dt = $$

$$ \frac{1}{60 \cdot 50} \int_0^{30} (50-t+60-t) dt = \frac{1}{3000} \int_0^{30} (110-2t) dt = \frac{1}{3000} \left[110t - t^2 \right]_0^{30} = \frac{1}{3000} \cdot 2400 = 0{,}8 $$

Vida residual conjunta hasta la extinción

Variable aleatoria = tiempo resta hasta la extinción del grupo

$$T\left(\overline{x,y}\right)$$

$$T_{\overline{x,y}}$$

$$T_{\overline{x,y}} = \max\left(T(x), T(y)\right)$$

Máximo de los tiempos hasta el fallecimiento
De los individuos , x, y , z……

$$T_{\overline{x,y}} + T_{x,y} = T(x) + T(y)$$

Si x fallece dentro de 3 años e y dentro de 7
T(x)=3 y T(y)=7 ; tiempo hasta disolución será 3,
Hasta la extinción 7.
Lo que sirve sumando sirve multiplicando, lógicamente

Función de distribución

$$F_{T_{\overline{xy}}}(t) = P(T_{\overline{xy}} \leq t) = {}_tq_{\overline{xy}} = {}_tq_x \cdot {}_tq_y$$

Probabilidad de que la extinción se produzca
antes de t

Probabilidad de que la vida residual conjunta
hasta la extinción sea menor que t

Conociendo que $l(x)=100-x \quad 0<x<100$, dos individuos de 40 y 50 años, probabilidad de que el grupo se extinga antes de 30 años si l(x)=100-x 0<x<100

$$ {}_{t}p_{x} = \frac{l(x+t)}{l(x)} = \frac{100-(x+t)}{100-x} = 1 - \frac{t}{100-x} $$

$$ {}_{30}p_{50} = \frac{l(x+t)}{l(x)} = \frac{100-(x+t)}{100-x} = 1 - \frac{30}{50} = 1 - 0,6 = 0,4 $$

$$ {}_{30}p_{40} = \frac{l(x+t)}{l(x)} = \frac{100-(x+t)}{100-x} = 1 - \frac{30}{60} = 1 - 0,5 = 0,5 $$

$$ {}_{30}p_{50} = 0,4 \rightarrow {}_{30}q_{50} = 1 - 0,4 = 0,6 $$

$$ {}_{30}p_{40} = 0,5 \rightarrow {}_{30}q_{40} = 1 - 0,5 = 0,5 $$

$$ F_{\overline{x,y}}(t) = {}_{t}q_{\overline{x,y}} = {}_{t}q_{x} \cdot {}_{t}q_{y} = {}_{30}q_{40} \cdot {}_{30}q_{50} = 0,3 = F_{\overline{40,50}}(30) $$

Ya calculado en pag 5

Función de densidad del tiempo hasta la extinción o vida residual hasta la extinción

Derivando la función de distribución $F_{T_{\overline{xy}}}(t) = P(T_{\overline{xy}} \le t) = {}_tq_{\overline{xy}} = {}_tq_x \cdot {}_tq_y$

$$f_{T_{\overline{xy}}}(t) = \frac{d}{dt} F_{T_{\overline{xy}}}(t) = \frac{d}{dt}\left({}_tq_x \cdot {}_tq_y\right) = {}_tq_x \cdot \frac{d}{dt}\,{}_tq_y + {}_tq_y \frac{d}{dt}\,{}_tq_x =$$

$$= {}_tq_x \cdot \frac{d}{dt}(1 - {}_tp_y) + {}_tq_y \frac{d}{dt}(1 - {}_tp_x) =$$

$$= f_{T_{\overline{xy}}}(t) = {}_tq_x \cdot {}_tp_y . \mu(y+t) + {}_tq_y \cdot {}_tp_x . \mu(x+t)$$

Esperanza de vida conjunta hasta la disolución

Es la esperanza de la variable vida residual hasta la disolución, tiempo medio tarda en disolverse, tiempo tardará por término medio en fallecer el primero

Recordemos que en términos generales

$$E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx$$

En nuestro caso

$$\overline{e}_{xy} = E[T_{xy}] = \int_{0}^{\infty} t . f_{T_{xy}}(t)dt = \int_{0}^{\infty} t . {}_{t}p_{xy} . \mu(x+t, y+t)\, dt$$

$\infty =$ infinito actuarial- max(x,y..)

O bien en base a cantidad de vida y cohorte

$$\overline{e}_{xy} = \frac{\int_{0}^{\infty} l(x+t, y+t)\, dt}{l(x,y)}$$

Conociendo que $l(x)=100-x$ $\quad 0<x<100$, dos individuos de 40 y 50 años, Hallar la esperanza de vida hasta la disolución

Recordemos que antes

$$ {}_t p_x = \frac{l(x+t)}{l(x)} = \frac{100-(x+t)}{100-x} = 1 - \frac{t}{100-x} $$

$$ \mu(x+t) = \frac{1}{100-x-t} \quad así \quad \mu(40+t) = \frac{1}{100-40-t} = \frac{1}{60-t} $$

$$ \mu(50+t) = \frac{1}{100-50-t} = \frac{1}{50-t} $$

$$ \bar{e}_{40,50} = \int_0^{100-(\max(x,y)} t.{}_t p_{40,50} \cdot (\mu(40+t) + \mu(50+t)dt = $$

$$ = \int_0^{50} t \cdot {}_t p_{40} \cdot {}_t p_{50} (\mu(40+t) + \mu(50+t)dt = \int_0^{50} t \cdot \left(1 - \frac{t}{60}\right) \cdot \left(1 - \frac{t}{50}\right)\left(\frac{1}{60-t} + \frac{1}{50-t}\right)dt = $$

$$ = \int_0^{50} t.\left(1 - \frac{t}{60}\right) \cdot \left(1 - \frac{t}{50}\right)\left(\frac{50-t+60-t}{(60-t)\cdot(50-t)}\right)dt = \frac{1}{60 \cdot 50}\int_0^{50} t.(60-t)\cdot(50-t)\left(\frac{50-t+60-t}{(60-t)\cdot(50-t)}\right)dt = $$

$$ \frac{1}{60 \cdot 50}\int_0^{50}(50-t+60-t)dt = \frac{1}{3000}\int_0^{50} t.(110-2t)dt = \frac{1}{3000}\int_0^{50}(110t - 2t^2)dt = $$

$$ \frac{1}{3000}\left[\frac{110t^2}{2} - \frac{2t^3}{3}\right]_0^{50} = \frac{1}{3000}[137500 - 83333,3] = \frac{1}{3000} \cdot 54166,66 = 18,055 $$

Esperanza de vida conjunta abreviada

$$e_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} l(x+i+1, y+i+1)}{l(x,y)} = \sum_{t=1}^{\infty} {}_{t}p_{xy}$$

Esperanza de vida conjunta completa

$$\overset{0}{e}_{xy} = \frac{1}{2} + \sum_{t=1}^{\infty} {}_{t}p_{xy} = \frac{1}{2} e_{xy}$$

Esperanza de vida conjunta hasta la **extinción**

Es la esperanza de la variable vida residual hasta la extinción, tiempo medio tarda en extinguirse, tiempo se tardará por término medio en fallecer todos

Recordemos que en términos generales $$E[x] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$$

En nuestro caso

$$\overline{e}_{\overline{xy}} = E[T_{\overline{xy}}] = \int_0^\infty t.f_{T_{\overline{xy}}}(t)dt = \int_0^\infty t.{}_tq_x\cdot{}_tp_y.\mu(y+t)dt + \int_0^\infty t.{}_tq_y\cdot{}_tp_x.\mu(x+t)dt$$

O bien

$$\overline{e}_{\overline{xy}} = \int_0^\infty t.{}_tp_y.\mu(y+t)dt - \int_0^\infty t.{}_tp_y\cdot{}_tp_x.\mu(y+t)dt +$$

$$+\int_0^\infty t.{}_tp_x.\mu(x+t)dt - \int_0^\infty t.{}_tp_y\cdot{}_tp_x.\mu(x+t)dt =$$

Lo que nos lleva a : $\overline{e}_{\overline{xy}} = \overline{e}_x + \overline{e}_y - \overline{e}_{xy}$

Conociendo que l(x)=100-x 0<x<100 , dos individuos de 40 y 50 años,
Hallar la esperanza de vida hasta la disolución

Ya hemos calculado antes

$$\bar{e}_{40,50} = \int_0^{100-(\max(x,y)} t\cdot_t p_{40,50} \cdot (\mu(40+t)+\mu(50+t)dt =$$

$$= \int_0^{50} t\cdot {}_t p_{40} \cdot {}_t p_{50} (\mu(40+t)+\mu(50+t)dt = \int_0^{50} t\cdot\left(1-\frac{t}{60}\right)\cdot\left(1-\frac{t}{50}\right)\left(\frac{1}{60-t}+\frac{1}{50-t}\right)dt =$$

$$= \int_0^{50} t.\left(1-\frac{t}{60}\right)\cdot\left(1-\frac{t}{50}\right)\left(\frac{50-t+60-t}{(60-t)\cdot(50-t)}\right)dt = \frac{1}{60\cdot 50}\int_0^{50} t.(60-t)\cdot(50-t)\left(\frac{50-t+60-t}{(60-t)\cdot(50-t)}\right)dt =$$

$$\frac{1}{60\cdot 50}\int_0^{50}(50-t+60-t)dt = \frac{1}{3000}\int_0^{50} t.(110-2t)dt = \frac{1}{3000}\int_0^{50}(110t-2t^2)dt =$$

$$\frac{1}{3000}\left[\frac{110t^2}{2}-\frac{2t^3}{3}\right]_0^{50} = \frac{1}{3000}\cdot 54166,66 = 18,05$$

$$\bar{e}_{40,50} = \int_0^{100-(\max(x,y)} t \cdot {}_t p_{40,50} \cdot (\mu(40+t) + \mu(50+t)dt = 18,05$$

$$\bar{e}_{40} = \int_0^{60} t \cdot {}_t p_{40} \cdot \mu(40+t)dt = \int_0^{60} t \cdot \left(1 - \frac{t}{60}\right) \cdot \left(\frac{1}{60-t}\right) dt =$$

$$= \int_0^{60} t . \left(\frac{60-t}{60}\right) \cdot \left(\frac{1}{60-t}\right) dt = \frac{1}{60} \int_0^{60} t dt = \frac{1}{60} \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{60} = \frac{1800}{60} = 30$$

$$\bar{e}_{50} = \int_0^{50} t \cdot {}_t p_{50} \cdot \mu(50+t)dt = \int_0^{50} t \cdot \left(1 - \frac{t}{50}\right) \cdot \left(\frac{1}{50-t}\right) dt =$$

$$= \int_0^{50} t . \left(\frac{50-t}{50}\right) \cdot \left(\frac{1}{50-t}\right) dt = \frac{1}{50} \int_0^{50} t dt = \frac{1}{50} \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{50} = \frac{1250}{50} = 25$$

$$\bar{e}_{\overline{40,50}} = \bar{e}_{40} + \bar{e}_{50} - \bar{e}_{40,50} = 30 + 25 - 18,05 = 36,95$$

Podemos, también, escribir la esperanza de vida hasta la extinción en función de las probabilidades de supervivencia temporal como:

$$\overline{e}_x = \int_o^\infty {}_tp_x dt \qquad \overline{e}_y = \int_o^\infty {}_tp_y dt \qquad \overline{e}_{xy} = \int_o^\infty {}_tp_{xy} dt$$

de forma que : $\overline{e}_{\overline{xy}} = \overline{e}_x + \overline{e}_y - \overline{e}_{xy} = \int_0^\infty ({}_tp_x + {}_tp_y - {}_tp_{xy})dt = \int_0^\infty {}_tp_{\overline{xy}}\, dt$

Las correspondientes esperanza de vidas hasta la extinción **abreviada** y **completa** quedarán como:

$$e_{\overline{xy}} = e_x + e_y - e_{xy} = \sum_{i=1}^{\infty} {}_tp_x + \sum_{i=1}^{\infty} {}_tp_y - \sum_{i=1}^{\infty} {}_tp_{xy} = \sum_{i=1}^{\infty} {}_tp_{\overline{xy}}$$

$$\overset{0}{e}_{\overline{xy}} = \overset{0}{e}_x + \overset{0}{e}_y - \overset{0}{e}_{xy} = \frac{1}{2} + e_x + \frac{1}{2} + e_y - \frac{1}{2} - e_{xy} = \frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} {}_tp_{\overline{xy}}$$

a)Comprobemos con esperanza de vida para una persona de 40 años
b)Comprobemos con esperanza de vida conjunta hasta disolución
de una pareja de 40 y 50 años

$$\bar{e}_x = \int_0^\infty {}_t p_x dt = \bar{e}_{40} = \int_0^{60} {}_t p_{40} dt = \int_0^{60} 1 - \frac{t}{60} dt = \frac{1}{60}\int_0^{60} (60 - t) dt = \frac{1}{60}\left[60t - \frac{t^2}{2} \right]_0^{60} = 30$$

$$\bar{e}_{x,y} = \bar{e}_{40,50} = \int_0^{50} \cdot {}_t p_{40,50} dt = \int_0^{50} \cdot \left(1 - \frac{110t}{3000} + \frac{t^2}{3000}\right) dt = \left[t - \frac{110 \cdot t^2}{2 \cdot 3000} + \frac{t^3}{3 \cdot 3000} \right]_0^{50} =$$

$$= \left[t - \frac{110 \cdot t^2}{6000} + \frac{t^3}{9000} \right]_0^{50} = 50 - \frac{275000}{6000} + \frac{125000}{6000} = 50 - 45,833 + 13,888 = 18,05$$