Ejer 2 MS

1.- Tenemos información sobre los valores del tanto instantáneo de mortalidad de 0 a 30 años.

Dicha información se condensa en x = edad e y =LN(tanto instantáneo) de forma que conocemos

$$\vec{m} = \begin{pmatrix} 14{,}5 \\ -5{,}976 \end{pmatrix} \quad \vec{V} = \begin{pmatrix} 74{,}917 & 1{,}49 \\ 1{,}49 & 0{,}03 \end{pmatrix}$$

Estimar linealmente los parámetros de C y g de un modelo de Gompertz

$$b = \frac{S_{x,y}}{S_x^2} = \frac{1{,}49}{74{,}917} = 0{,}01988 \cong 0{,}02$$

$\bar{y} = a + b\bar{x} \rightarrow -5{,}976 = a + 0{,}02 \cdot 14{,}5$ a= -5,976-0,29=-6,266

C=EXP(b)=1,02 -LN(g)=EXP(a).b=0,001899/0,02=0,09499

Luego g=EXP(-0,09499)=0,909

2.-Calcular con los valores estimados el tanto instantáneo de mortalidad para una persona de 40 años

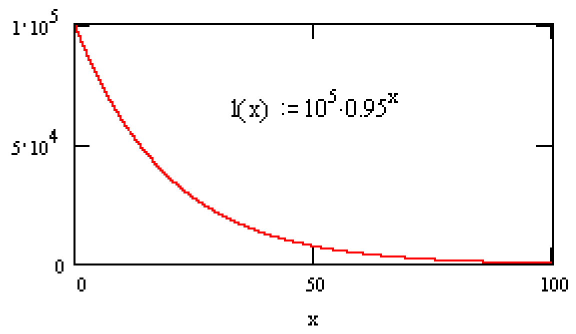
C=1,02 g=0,0909

$\mu_x = -\ln g \cdot \ln C \cdot C^x$ ln(g)=-0,09541 ln(c)=0,0198 C^40=2,208

Luego $\mu_x = 0{,}00417$

Comprobar con Caest

3. Consideremos un colectivo cuya función de supervivientes de una cohorte inicial de 10000 se comporta según la primera ley de Dormoy $l(x)=KS^x$ con K>0 y 0<S<1 que en esta ocasión se materializa en K=10000 y S=0.95.



a) probar que este modelo es equivalente a considerar que la variable aleatoría x= edad de fallecimiento sigue una distribución exponencial con α=- ln(S)

b) determinar el tanto instantáneo de mortalidad.

c) Obtener la probabilidad de que una persona de 50 años sobreviva 15 años más y compararla con la probabilidad de sobrevivir a los 15 años de edad.

---

a) Como $l(x)=l_0\, S(x)$ tendremos que $S(x)=l(x) / l_0$

$$S(x)=\frac{l(x)}{l_0}=\frac{l(x)}{l(0)}=\frac{KS^x}{KS^0}=S^x=0.95^x=e^{\ln(0.95)x}=e^{-0.05129x}$$

Por lo tanto la f.de distribución será:$F(x)=1-e^{-0.05129x}$ que es la de una distribución exponencial de parámetro $\alpha=0.05129 = -\ln(S)$

Por cierto que la función de densidad será $f(x)=0.05129.\ e^{-0.05129x}$

b) el tanto instantáneo de mortalidad vendrá dado por:

$$\mu_x=-\frac{S'(x)}{S(x)}=-\frac{\ln(S).S^x}{S^x}=-\ln(S)=0.05129$$

Constante para cualquier valor de x

c)

$$_{15}p_{50}=\frac{S(50+15)}{S(50)}=\frac{S^{65}}{S^{50}}=S^{15}=0.95^{15}=e^{-0.05129.15}=0.46319123$$

$$_{15}p_0=S(15)=S^{15}=0.95^{15}=e^{-0.05129.15}=0.46319123$$

Vemos como la probabilidad es la misma la probabilidad de sobrevivir 15 años más no depende del tiempo ya sobrevivido (típica propiedad de la distribución exponencial: NO tiene memoria)

4.- (Similar a Pavía 61) La función de supervivencia de una población sigue una ley de De Moivre, con máximo tiempo de vida 120 años

$$S(x)=1-\frac{x}{120}$$

a) expresar d_x en función de la cohorte inicial
b) como es el tanto instantáneo de mortalidad
c) Determina la esperanza de vida al nacer y la vida media probable (mediana de la variable vida residual) al nacer.

---

a)

$$d_x = l_0\left(S(x)-S(x+1)\right) = l_0\left(\left(1-\frac{x}{120}\right)-\left(1-\frac{x+1}{120}\right)\right) = \left(\frac{x+1}{120}-\frac{x}{120}\right) = \frac{l_0}{120}$$

Es decir cada año fallece un 120-avo de la población hasta desaparecer a los 120 años

b) $\mu(x) = -\dfrac{S'(x)}{S(x)} = -\dfrac{-\frac{1}{120}}{\left(1-\frac{x}{120}\right)} = \dfrac{1}{120-x}$

Que es una función “aceleradamente” creciente

c)

$$\bar{e}_x = \int_0^{120-x} {}_t p_x dt = \int_0^{120-x} \frac{S(x+t)}{S(x)} dt = \int_0^{120-x} \frac{1-\frac{x+t}{120})}{1-\frac{x}{120}} dt = \int_0^{120-x} \frac{120-(x+t)}{120-x} dt =$$

$$= \bar{e}_x = \frac{1}{120-x}\int_0^{120-x} 120-x-t\, dt = \frac{1}{120-x}[120t-xt-\frac{t^2}{2}]_0^{120-x} =$$

$$= \frac{1}{120-x}\left(120(120-x)-(120-x)x-\frac{(120-x)^2}{2}\right) = \frac{1}{120-x}\left(120^2-\cancel{120x}-120x+x^2-\frac{120^2}{2}+\cancel{120x}-\frac{x^2}{2}\right)$$

$$= \bar{e}_x = \frac{1}{120-x}\left(\frac{120^2}{2}+\frac{x^2}{2}-120x\right) = \frac{\frac{(120-x)^2}{2}}{120-x} = \frac{120-x}{2}$$

Que al nacer será una esperanza de vida de 60 años

Respecto a la vida media probable **al nacer** es la mediana de la edad de fallecimiento y por tanto:F(x)=0.5 → S(x)=0.5→ 60 años

5.- Si conocemos que los parámetros de un modelo de Makeham son calcular la probabilidad de supervivencia de una persona 50 años en los próximos 3

$$S = \exp(-A) = 0.904837 \qquad C = 1.05$$

$$g = \exp\left(-\frac{B}{\ln(C)}\right) = \exp-\frac{0.01}{0.048790} = 0.81468$$

De forma que :

$$ {}_3p_{50} = \frac{S(53)}{S(50)} = \frac{S^{53}\cdot g^{(C^{53}-1)}}{S^{50}\cdot g^{(C^{50}-1)}} = 0.904837^3 \cdot \frac{0.81468^{(1.05^{53}-1)}}{0.81468^{(1.05^{50}-1)}} = 0.904837^3 \cdot \frac{0.81468^{(12.274949)}}{0.81468^{(10.4674)}} = $$

$$ = 0.904837^3 \cdot 0.81468^{1.80754921} = 0.7408 \cdot 0,76904 = 0,511 $$