TEMA 1: Principales modelos de mortalidad. Modelización estocástica.

- Ley de De Moivre.
- Leyes de Dormoy y de Sang.
- Leyes de Gompertz y de Makeham.
- Otros modelos de mortalidad.

Estudiaremos aquí distintos modelos de comportamiento aleatorio de las funciones biométricas. En cada caso el modelo propone una forma funcional para la función de supervivencia, el tanto instantáneo de mortalidad, la probabilidad de supervivencia o/y la probabilidad de fallecimiento.

La razón e interés de la construcción, diseño y estudio de los modelos de supervivencia pivota sobre dos ámbitos: uno metodológico y otro práctico:

Metodológicamente la consideración de algunas hipótesis sobre los fenómenos biométricos conlleva una estructura funcional de algunas de las funciones biométricas.

En el ámbito práctico, una vez seleccionado un modelo que implica un forma funcional para una determinada función biométrica, ésta dependerá de unos pocos parámetros (2 o 3) y una vez determinados (generalmente estimados estadísticamente) la obtención de cualquier "incógnita" biométrica se convierte en un simple problema de cálculo.

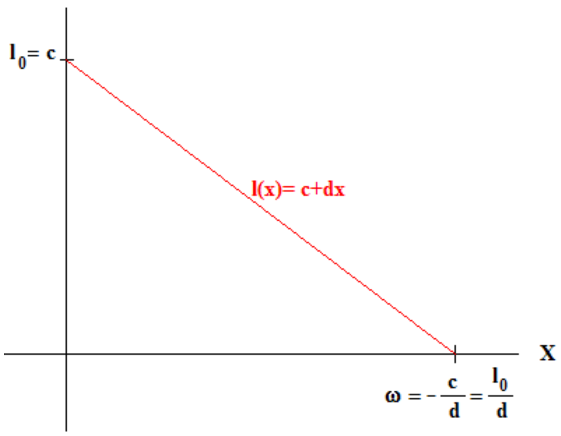
Antes de introducirnos en los distintos modelos hay que tener en cuenta finalmente que, aunque los estudiaremos separadamente, en la práctica suelen tomarse muchas veces de forma combinada aplicando un modelo distinto a distintos tramos de edad.

Ley de De Moivre

La ley de De Moivre supone que la **función de supervivencia es una función lineal de la edad**: $\boxed{l(x)=c+d.x}$ para $x \geq 0$

Los parámetros c y d son fácilmente identificables:

$\boxed{l_0 = c + d\,.0= c}$ $\quad l_\omega = 0 = c + d.\omega \rightarrow \boxed{\omega = -\, c/d}$



Como la ordenada en el origen es l_0 y la pendiente es $-(l_0/\omega)$, podemos escribir la ley de De Moivre como:

$$\boxed{l(x) = l_0 - \frac{l_0}{\omega}x = l_0(1-\frac{x}{\omega})}$$

Para edades enteras la función de supervivencia será una progresión aritmética decreciente con diferencia l_0/ω : Esta diferencia es, en realidad, las defunciones anuales:

$$d_x = l_x - l_{x+1} = l_0(1-\frac{x}{\omega}) - l_0(1-\frac{x+1}{\omega}) = \frac{l_0}{\omega}$$

Es decir, el modelo supone que las defunciones son iguales todos los años y coinciden con la pendiente cambiada de signo de la f. de supervivientes, en definitiva, igual al tamaño de la cohorte dividido por la edad de extinción, ya que los fallecimientos se distribuyen igualitariamente todos los años.

Las probabilidades de fallecimiento serán:

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} = \frac{\frac{l_0}{\omega}}{l_0(1-\frac{x}{\omega})} = \frac{1}{\omega - x}$$

Por lo tanto la probabilidad anual de fallecimiento es creciente, lo que es lógico si pensamos que el número de fallecidos es constante pero pertenecen a un colectivo que va menguando con la edad.

Igualmente la tasa instantánea de mortalidad también será creciente y, de hecho, coincide con la probabilidad anual de fallecimiento:

$$\mu_x = -\frac{l'(x)}{l(x)} = -\frac{-\frac{l_0}{\omega}}{l_0(1-\frac{x}{\omega})} = \frac{1}{\omega - x}$$

Como el tanto instantáneo crece con la edad este modelo suele usarse para tramos de edades altas.

En cuanto a las probabilidades temporales de supervivencia y fallecimiento para más de un año tendremos:

$${}_n p_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} = \frac{l_0(1-\frac{x+n}{\omega})}{l_0(1-\frac{x}{\omega})} = \frac{\omega - x - n}{\omega - x} = 1 - \frac{n}{\omega - x} = 1 - n \cdot \mu_x$$

$${}_n q_x = 1 - {}_n p_x = 1 - (1 - n \cdot \mu_x) = n \cdot \mu_x$$

Esta última expresión muestra que la probabilidad de fallecer en un tramo de tiempo es proporcional a μ_x según el factor n (años del tramo): por lo que, por ejemplo, la probabilidad de que un individuo fallezca en los próximos 10 años es el doble de que lo haga en los próximos 5.

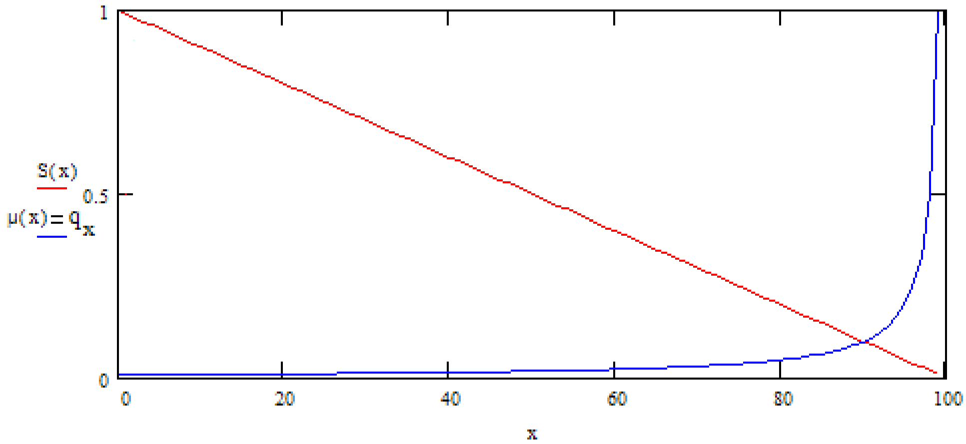
La función de supervivencia S(x) y la función de distribución de la edad de fallecimiento puede obtenerse también a partir de l(x) como:

$S(x)=l(x)/l_0$ y $F(x)=1-S(x)$

Tendremos que $\boxed{S(x)=\frac{l(x)}{l_0}=1-\frac{x}{\omega}} \Rightarrow \boxed{F(x)=\frac{x}{\omega}}$

Por lo que: f(x)= 1 /ω lo que supone que según la ley de De Moivre la variable edad de fallecimiento sigue una Distribución **Uniforme** en [0,ω]

En el siguiente gráfico se muestran las funciones de: Supervivencia (la de distribución sería la diagonal contraria) y tanto instantáneo de mortalidad (que coincide con la probabilidad de fallecimiento) en el modelo de De Moivre



Igualmente es muy sencillo ver que la distribución de la vida residual es también una distribución uniforme en el intervalo [x,ω], ya que

$$g_x(t)={}_tp_x\cdot\mu(x+t)=\frac{l(x+t)}{l(x)}.\frac{1}{\omega-x-t}=\frac{l_0(1-\frac{x+t}{\omega})}{l_0(1-\frac{x}{\omega})}\frac{1}{\omega-x-t}=\frac{1}{\omega-x}$$

Que es la función de densidad de una uniforme en [x,ω] y ,de aquí, es elemental concluir que la esperanza de vida en x y la vida residual probable son, precisamente, ((ω-x) / 2)

Resumiendo en esta ficha el modelo:

Modelo	De Moivre
enunciado	La supervivencia es función lineal (decreciente) de la edad
Distribución de X	uniforme
l(x)	$l_0(1-\frac{x}{\omega})$
d_x	$\frac{l_0}{\omega}$
p_x	$\frac{\omega-x-1}{\omega-x}$
q_x	$\frac{1}{\omega-x}$
μ_x	$\frac{1}{\omega-x}$
$_np_x$	$1-n.\mu_x$
$_nq_x$	$n.\mu_x$
S(x)	$1-\frac{x}{\omega}$
F(x)	$\frac{x}{\omega}$
f(x)	$\frac{1}{\omega}$
$g_x(t)$	$\frac{1}{\omega-x}$
e_x	$\frac{\omega-x}{2}$
V_x	$\frac{\omega-x}{2}$