Primera ley de Dormoy

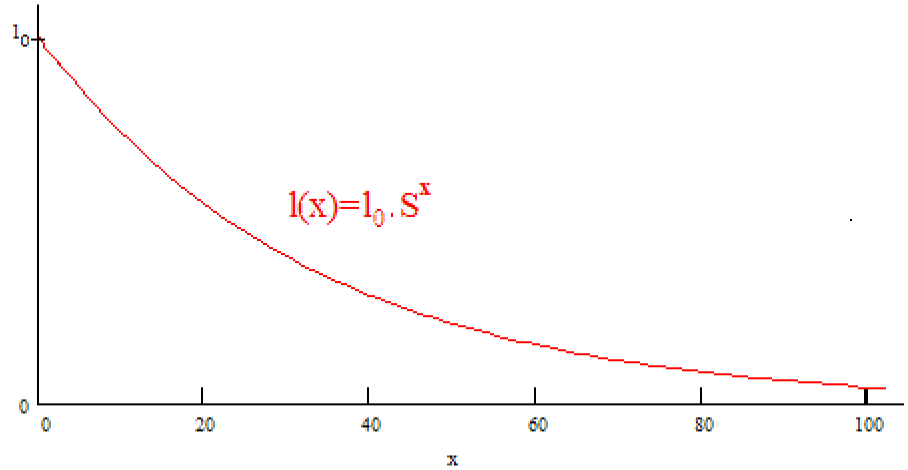
La primera ley de Dormoy supone que la forma funcional de **la función de supervivientes** l(x) **es exponencial** según:

$$\boxed{l(x) = K \cdot S^x}$$

Donde **S** es un valor **menor que 1** para que l(x) sea una función decreciente

Para x= 0 tendremos que $l(0)=l_0$ y por lo tanto el parámetro K es el valor inicial de la cohorte

$$l(0) = l_0 = K \cdot S^0 = K \quad \rightarrow \quad \boxed{l(x) = l_0 \cdot S^x}$$



Alternativamente podemos considerar $S=e^{-\alpha}$ y el modelo para l(x) se podría re-escribir como:

$$l(x) = l_0 \cdot S^x = l_0 \cdot e^{-\alpha x}$$

Para edades enteras los valores de la función de supervivencia se encuentran en progresión geométrica decreciente de razón S (S<1):

$$l_{x+1} = l_0 \cdot S^{x+1} = l_0 \cdot S^x \cdot S = l_x S$$

De aquí se deduce que la probabilidad de supervivencia anual es constante e igual a S ya que :

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} = S$$

Como consecuencia la probabilidad anual de fallecimiento será igualmente constante q_x= 1-S

Para obtener la tasa instantánea de mortalidad derivemos la función l(x):

$$l'(x) = l_0 S^x (\ln(S))$$

Y el tanto instantáneo de mortalidad será la *constante* –ln(S), en efecto:

$$\mu(x) = -\frac{l'(x)}{l(x)} = -\frac{l_0 S^x (\ln(S))}{l_0 S^x} = -\ln(S) = \alpha$$

Por lo tanto la fuerza de la mortalidad se está considerando independiente de la edad.

Puede tener sentido esta consideración, y por lo tanto este modelo, de forma muy aproximada, en los tramos centrales de edad.

Veamos ahora cómo se comportan las probabilidades temporales de supervivencia y fallecimiento:

$$ {}_n p_x = \frac{l(x+n)}{l(x)} = \frac{l_0 \cdot S^{x+n}}{l_0 \cdot S^x} = S^n \qquad {}_n q_x = 1 - S^n $$

Que son también independientes de la edad.

En cuanto a la función de supervivencia S(x) tendremos que :

$$ S(x) = \frac{l(x)}{l_0} = \frac{l_0 S^x}{l_0} = S^x $$

La función de distribución de la edad de fallecimiento será:

$F(x)=1-S^x$

Y derivándolo obtenemos las de densidad:

$$ f(x) = F'(x) = -S^x(\ln(S)) $$

Nótese que se trata de la función de densidad de un distribución exponencial cuyo parámetro sería $\alpha = -\ln(S)$:

$$ f(x) = -S^x(\ln(S)) = \alpha(e^{-\alpha})^x = \alpha e^{-\alpha x} $$

La función de densidad de la variable vida residual vendrá dada por:

$$ g_x(t) = {}_t p_x \cdot \mu(x+t) = S^t(-\ln(S)) $$

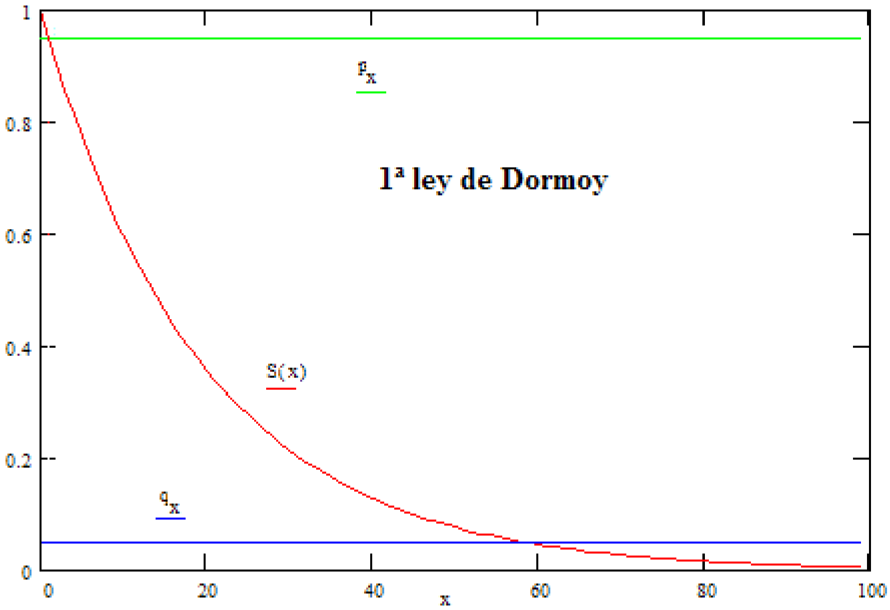
Que es también la función de densidad de una exponencial con parámetro $\alpha = -\ln(s)$

La esperanza de vida será la media de la vida residual que al seguir una distribución exponencial tomará el valor recíproco de su parámetro :

$$ e_x = E\left(t \mid t \to \exp(\alpha = -\ln(S))\right) = -\frac{1}{\ln(S)} $$

Y la vida media probable acabará siendo :

$$ V_x = -\frac{\ln 2}{\ln(S)} $$



El gráfico muestra la función de supervivencia, la probabilidad anual de supervivencia y muerte para una ley (1ª) de Dormoy de parámetro S=0.95

Modelo	Primera ley de Dormoy
enunciado	La supervivencia es función exponencial (decreciente) de la edad
Distribución de X	Exponencial (α=-ln(S))
l(x)	$l_0 \cdot S^x$
d_x	$l_0 \cdot S^x (1-S)$
p_x	S (constante)
q_x	1-S (constante)
μ_x	$-\ln(S)$ (constante)
${}_n p_x$	S^n
${}_n q_x$	$1-S^n$
S(x)	S^x
F(x)	$1-S^x$
f(x)	$-S^x(\ln(S))$ ($x \to \exp(\alpha = -\ln(S))$)
$g_x(t)$	$-\ln(S) \cdot S^t$
e_x	$-\frac{1}{\ln(S)}$
V_x	$-\frac{\ln 2}{\ln(S)}$