**Segunda ley de Dormoy**

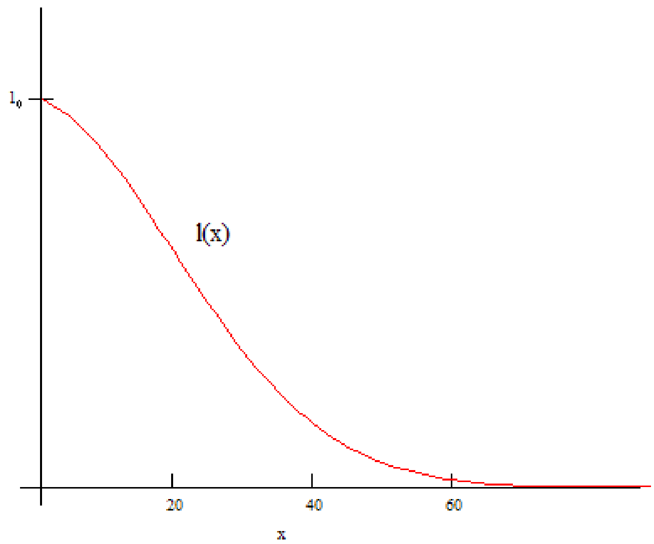
En el modelo anterior ni la tasa instantánea de mortalidad ni la probabilidad (anual) de fallecimiento dependían de la edad. En algunas situaciones esto será poco realista. Precisamente para subsanar esto y que $\mu_x$ y $q_x$ sí dependan de x , la segunda ley de Dormoy propone una función de supervivientes l(x) según el siguiente esquema:

$$l(x) = K \cdot S_1^x \cdot S_2^{x^2}$$

Donde $S_1$ y $S_2$ son inferiores a la unidad y como en la primera ley $K=l_0$.

$$\boxed{l(x) = l_0 \cdot S_1^x \cdot S_2^{x^2}}$$

El siguiente gráfico muestra cómo quedaría l(x) para $S_1=0.995$ y $S_2=0.999$




**Alternativamente podemos considerar $S_1=e^{-\alpha}$ y $S_2=e^{-\beta}$ y el modelo para l(x) se podría re-escribir como:**

$$\boxed{l(x) = l_0 \cdot S_1^x \cdot S_2^{x^2} = l_0 \cdot e^{-(\alpha x + \beta x^2)}}$$

En la 2ª ley de Dormoy las probabilidades de supervivencia y fallecimiento anual resultarán:

$$\boxed{p_x = \frac{l(x+1)}{l(x)} = \frac{l_0 S_1^{x+1} S_2^{(x+1)^2}}{l_0 S_1^x S_2^{x^2}} = S_1 S_2^{2x+1}}$$

$$\boxed{q_x = 1 - p_x = 1 - (S_1 S_2^{2x+1})}$$

Para determinar el tanto instantáneo de mortalidad, primero derivamos la función de supervivientes:

$$l'(x) = l_0 \cdot S_1^x \cdot \left(2x \cdot S_2^{x^2} \cdot \ln(S_2)\right) + l_0 \cdot S_2^{x^2} \cdot \left(S_1^x \cdot \ln(S_1)\right) =$$
$$= l_0 \cdot S_1^x \cdot S_2^{x^2}\left(2 \cdot \ln(S_2) \cdot x + \ln(S_1)\right) = l(x)\left(2 \cdot \ln(S_2) \cdot x + \ln(S_1)\right)$$

Por lo que el tanto instantáneo de mortalidad quedará como:

$$\mu(x) = -\frac{l'(x)}{l(x)} = -\frac{l(x) \cdot \left(2\ln(S_2)x + \ln(S_1)\right)}{l(x)} = -2\ln(S_2)x - \ln(S_1)$$

**(alternativamente $\mu(x)=\alpha+2\beta x$)**

La probabilidades temporales de supervivencia y muerte serán, para la segunda ley de Dormoy:

$${}_n p_x = \frac{l(x+n)}{l(x)} = \frac{l_0 \cdot S_1^{x+n} \cdot S_2^{(x+n)^2}}{l_0 \cdot S_1^x \cdot S_2^{x^2}} = S_1^n \cdot S_2^{2nx+n^2} = \left(S_1 \cdot S_2^{2x+n}\right)^n$$
$${}_n q_x = 1 - {}_n p_x = 1 - \left(S_1 \cdot S_2^{2x+n}\right)^n$$

Las función de supervivencia y distribución serán :

$$S(x) = \frac{l(x)}{l_0} = S_1^x \cdot S_2^{x^2}$$
$$F(x) = 1 - S_1^x \cdot S_2^{x^2}$$

**(alternativamente $S(x)=e^{-(\alpha x+\beta x^2)}$ y $F(x)=1- e^{-(\alpha x+\beta x^2)}$ )**

Y la función de densidad quedará como:

$$f(x) = F'(x) = -\left(2x \cdot \ln(S_2) + \ln(S_1)\right) S_1^x \cdot S_2^{x^2}$$

(alternativamente $f(x)=(2\beta x+\alpha).e^{-(\alpha x+\beta x^2)}$)

En cuanto a la distribución de la vida residual $T_x=(X-x)$ su función de densidad quedará como:

$$g_x(t) = {}_t p_x \cdot \mu(x+t) = \left(S_1 \cdot S_2^{2x+t}\right)^t \left(-2\ln(S_2)(x+t) - \ln(S_1)\right)$$

A partir de la densidad de vida residual podríamos obtener la esperanza de vida como la esperanza de la variable $T_x$, aunque se suele obtener a partir de la integral de la probabilidad de supervivencia temporal, y aún así por aproximación numérica:

$$\overline{e}_x = E(T_x) = \int_0^\infty t.g(t)dt =$$
$$\overline{e}_x = \int_0^\infty {}_t p_x dt = \int_0^\infty \left(S_1 \cdot S_2^{2x+t}\right)^t dt$$

En cuanto a la vida residual probable puede obtenerse igualando a ½ la probabilidad temporal de supervivencia en ella y tendríamos:

$$ {}_{v_x}p_x = \frac{1}{2} \rightarrow \left(S_1 \cdot S_2^{2x+v_x}\right)^{v_x} = S_1^{v_x} \cdot S_2^{2xv_x+v_x^2} = \frac{1}{2} \rightarrow \text{tomando logaritmos:} $$

$$ v_x \cdot \ln(S_1) + (2xv_x + v_x^2)\ln(S_2) = -\ln(2) \rightarrow \text{ resolviendo la ecuación de 2º grado} $$

$$ v_x = \frac{-2x\ln(S_2) - \ln(S_1) - \sqrt{\left(2x\ln(S_2) + \ln(S_1)\right) - 4\ln(2)\ln(S_2)}}{2\ln(S_2)} $$

| | |
|---|---|
| Modelo | Segunda ley de Dormoy |
| enunciado | La supervivencia es función exponencial-cuadrática ( decreciente) de la edad |
| Distribución de X | Exponencial-cuadrática |
| l(x) | $l_0 \cdot S_1^{x} \cdot S_2^{x^2}$ $\qquad l_0 \cdot e^{-(\alpha x+\beta x^2)}$ |
| $d_x$ | $l_0 \cdot S_1^{x} \cdot S_2^{x^2} \cdot \left(1-(S_1 S_2^{2x+1})\right)$ |
| $p_x$ | $S_1 S_2^{2x+1}$ |
| $q_x$ | $1-(S_1 S_2^{2x+1})$ |
| $\mu_x$ | $-2\ln(S_2)x - \ln(S_1)$ $\qquad \alpha+2\beta x$ |
| ${}_np_x$ | $\left(S_1 \cdot S_2^{2x+n}\right)^n$ |
| ${}_nq_x$ | $1-\left(S_1 \cdot S_2^{2x+n}\right)^n$ |
| S(x) | $S_1^{x} \cdot S_2^{x^2}$ $\qquad e^{-(\alpha x+\beta x^2)}$ |
| F(x) | $1-S_1^{x} \cdot S_2^{x^2}$ $\qquad 1\text{-}e^{-(\alpha x+\beta x^2)}$ |
| f(x) | $-\left(2x\cdot\ln(S_2)+\ln(S_1)\right)S_1^{x} \cdot S_2^{x^2}$ $\qquad (2\beta x+\alpha).e^{-(\alpha x+\beta x^2)}$ |
| $g_x(t)$ | $\left(S_1 \cdot S_2^{2x+t}\right)^t \left(-2\ln(S_2)(x+t)-\ln(S_1)\right)$ |
| $e_x$ | $\int_0^{\infty}\left(S_1 \cdot S_2^{2x+t}\right)^t dt$ |
| $V_x$ | $\frac{-2x\ln(S_2) - \ln(S_1) - \sqrt{\left(2x\ln(S_2) + \ln(S_1)\right) - 4\ln(2)\ln(S_2)}}{2\ln(S_2)}$ |