Ley de Gompertz

La ley de Gompertz se plantea , al igual que hacía la segunda ley de Dormoy, considerar el tanto instantáneo de mortalidad creciente con la edad, pero con un crecimiento relativo constante (en la ley de Dormoy este crecimiento relativo es decreciente). Es decir que la ley Gompertz plantea que :

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \gamma$$

Con γ constante y positiva.
Integrando la expresión anterior:

$$\ln(\mu(x)) = \gamma x + h \Rightarrow \mu(x) = e^{\gamma x + h} = BC^x$$

Donde B= e^h es positiva y C= e^γ >1, ya que γ era positiva.

Veamos la expresión que toma la función de supervivientes, l(x):

$$-\frac{l'(x)}{l(x)} = \mu(x) = BC^x \rightarrow \text{integrando} \rightarrow -\ln(l(x)) = \frac{BC^x}{\ln(C)} + D \rightarrow$$

$$l(x) = e^{-\frac{BC^x}{\ln C} - D} \rightarrow l(x) = K \cdot g^{C^x}$$

con:

$$K = e^{-D} > 0 \qquad g = e^{-\frac{B}{\ln C}} \quad | \, 0 < g < 1 \text{ (ya que } \frac{B}{\ln C} > 0)$$

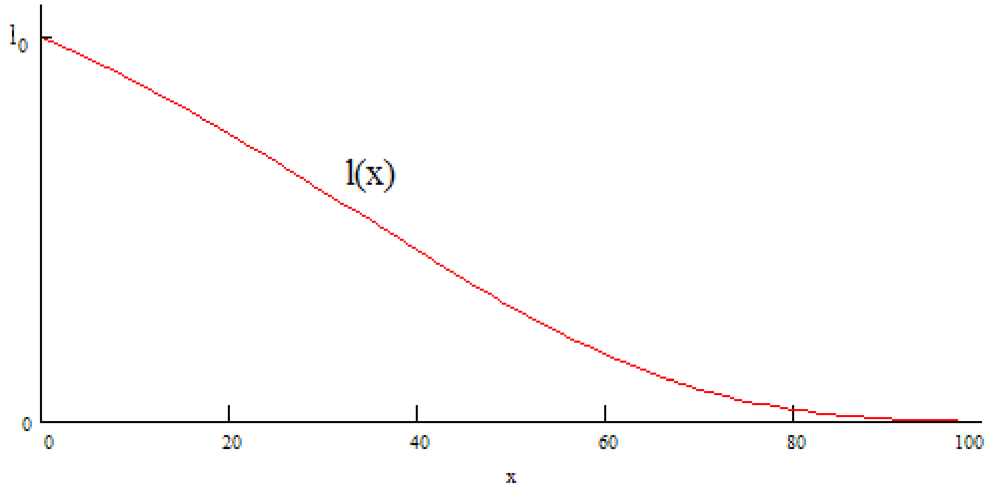
Podemos relacionar la constante K con l_0:

$$l_0 = l(0) = K \cdot g^{C^0} = K \cdot g$$

Por lo que podemos reescribir la expresión de l(x) como:

$$l(x) = K \cdot g^{C^x} = \frac{l_0 \cdot g^{C^x}}{g} = l_0 \cdot g^{C^x - 1}$$

Aquí se muestra la función l(x) según la ley de Gompertz para valores C=1.03 y g=0.7:



Teniendo en cuenta las expresiones anteriores es fácil ver que el tanto instantáneo de mortalidad, en función de los parámetros C y g quedaría como:

$$\mu(x) = -\ln(g).\ln(C).C^x$$

Las probabilidades temporales de supervivencia y muerte vendrán dadas por:

$$ {}_n p_x = \frac{l(x+n)}{l(x)} = \frac{l_0 \cdot g^{C^{x+n}-1}}{l_0 \cdot g^{C^x-1}} = g^{C^{x+n}-C^x} = g^{C^x(C^n-1)} $$

$$ {}_n q_x = 1 - {}_n p_x = 1 - g^{C^x(C^n-1)} $$

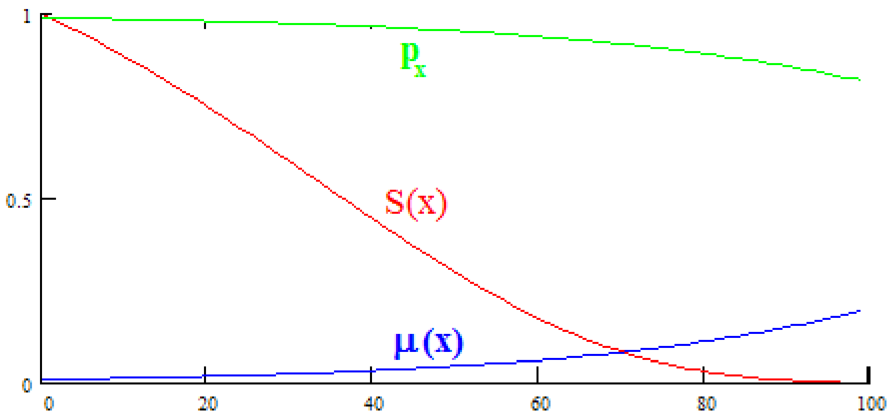
La función (teórica) de supervivencia, S(x), y las funciones de distribución y de densidad de la variable edad de fallecimiento serán:

$$ S(x) = \frac{l(x)}{l_0} = g^{C^x-1} $$

$$ F(x) = 1 - S(x) = 1 - g^{C^x-1} $$

$$ f(x) = F'(x) = -\ln(g).\ln(C).C^x \cdot g^{C^x-1} $$

El siguiente gráfico muestras las funciones S(x), p_x, μ(x) para una ley de Gompertz con C=1.03 y g=0.7



La vida residual a la edad x, $T_x(X)$ tendrá una función de densidad:

$$ g_x(t) = {}_t p_x \cdot \mu(x+t) = -\left(g^{C^x(C^t-1)} \cdot \ln(g).\ln(C).C^{x+t} \right) $$

Obtener la esperanza de T para determinar la esperanza de vida en x es difícil para valores generales y en cuanto a la vida probable , a partir de su definición, se puede obtener que es :

$$ v_x = \frac{1}{\ln C} \ln\left(1 - \frac{\ln 2}{C^x \ln g} \right) $$

Modelo	ley de Gompertz
enunciado	La mortalidad(tanto instántaneo) se considera creciente con un crecimiento relativo constante.
Distribución de X	
l(x)	$l_0 \cdot g^{C^x-1}$ C >1, g <1 ambas positivas
d_x	
p_x	$g^{C^x(C-1)}$
q_x	$1-g^{C^x(C-1)}$
μ_x	$-\ln(g).\ln(C).C^x$
${}_np_x$	$g^{C^x(C^n-1)}$
${}_nq_x$	$1-g^{C^x(C^n-1)}$
S(x)	g^{C^x-1}
F(x)	$1-g^{C^x-1}$
f(x)	$-\ln(g).\ln(C).C^x \cdot g^{C^x-1}$
$g_x(t)$	$-\left(g^{C^x(C^t-1)} \cdot \ln(g).\ln(C).C^{x+t}\right)$
e_x	$E(T_x)$
V_x	$\frac{1}{\ln C}\ln\left(1-\frac{\ln 2}{C^x \ln g}\right)$