Ley de Sang

La ley de Sang es una modificación de la primera ley de Dormoy añadiendo a la función l(x) la adición una constante independiente de la edad:

$$\boxed{l(x) = a + Kb^x}$$

Con K positivo y b comprendido entre 0 y 1. Discutiendo la función para sus valores singulares (l(0), l(ω)) podemos evaluar algunos de sus parámetros:

$$\left.\begin{array}{l} l(0) = l_0 = a + Kb^0 = a + K = l_0 \rightarrow a = l_0 - K \\ l(\omega) = 0 = a + Kb^\omega \rightarrow l_0 - K + Kb^\omega = 0 \end{array}\right\}$$

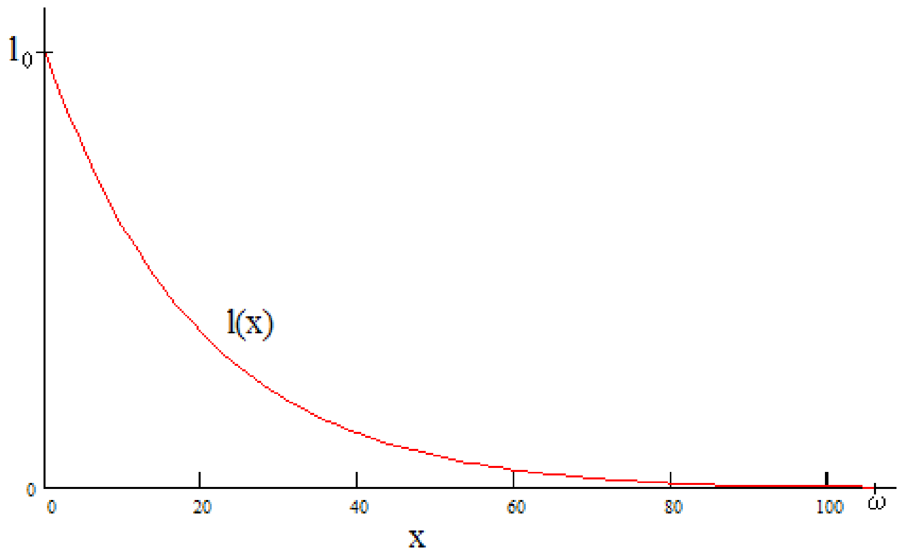
$$l_0 - K(1-b^\omega) = 0 \rightarrow \boxed{K = \frac{l_0}{(1-b^\omega)}}$$ y entonces el valor de a se podría obtener como:

$$a = l_0 - K = l_0 - \frac{l_0}{(1-b^\omega)} = \boxed{a = -\frac{l_0 b^\omega}{1-b^\omega}}$$

Quedando la función l(x) como:

$$\boxed{l(x) = a + Kb^x = -\frac{l_0 b^\omega}{1-b^\omega} + \frac{l_0}{1-b^\omega} b^x = \frac{l_0}{1-b^\omega}(b^x - b^\omega)}$$

El siguiente gráfico muestra la función de supervivientes según la ley de Sang



Para determinar el tanto instantáneo de mortalidad, primero derivamos la función de supervivientes:

$$l'(x) = \frac{l_0}{1-b^\omega} b^x \ln(b)$$

Por lo que el tanto instantáneo de mortalidad quedará como:

$$\mu(x) = -\frac{l'(x)}{l(x)} = -\frac{\frac{l_0}{1-b^{\omega}} b^x \ln(b)}{\frac{l_0}{1-b^{\omega}}(b^x - b^{\omega})} = -\frac{b^x \ln(b)}{(b^x - b^{\omega})} = \frac{b^x \ln(b)}{(b^{\omega} - b^x)} = \frac{\ln(b)}{(b^{\omega-x} - 1)}$$

Resultando un tanto instantáneo positivo (numerador y denominador son ambos negativos) y creciente con la edad.

Las probabilidades anuales de supervivencia y fallecimiento, quedarán como:

$$p_x = \frac{l(x+1)}{l(x)} = \frac{\frac{l_0}{1-b^{\omega}}(b^{x+1} - b^{\omega})}{\frac{l_0}{1-b^{\omega}}(b^x - b^{\omega})} = \frac{(b^{x+1} - b^{\omega})}{(b^x - b^{\omega})} = \frac{\frac{(b^{x+1} - b^{\omega})}{b^x}}{\frac{(b^x - b^{\omega})}{b^x}} = \frac{b - b^{\omega-x}}{1 - b^{\omega-x}}$$

$$q_x = 1 - p_x = 1 - \frac{b - b^{\omega-x}}{1 - b^{\omega-x}} = \frac{1-b}{1 - b^{\omega-x}}$$

Las probabilidades temporales de supervivencia y fallecimiento serán:

$${}_n p_x = \frac{l(x+n)}{l(x)} = \frac{\frac{l_0}{1-b^{\omega}}(b^{x+n} - b^{\omega})}{\frac{l_0}{1-b^{\omega}}(b^x - b^{\omega})} = \frac{(b^{x+n} - b^{\omega})}{(b^x - b^{\omega})} = \frac{\frac{(b^{x+n} - b^{\omega})}{b^x}}{\frac{(b^x - b^{\omega})}{b^x}} = \frac{b^n - b^{\omega-x}}{1 - b^{\omega-x}}$$

$${}_n q_x = 1 - {}_n p_x = 1 - \frac{b^n - b^{\omega-x}}{1 - b^{\omega-x}} = \frac{1-b^n}{1 - b^{\omega-x}}$$

La función de supervivencia y la de distribución de la variable X=edad de fallecimiento tomará la expresión:

$$S(x) = \frac{l(x)}{l_0} = \frac{1}{l_0}\frac{l_0}{1-b^{\omega}}(b^x - b^{\omega}) = \frac{(b^x - b^{\omega})}{1-b^{\omega}}$$

$$F(x) = 1 - S(x) = 1 - \frac{(b^x - b^{\omega})}{1-b^{\omega}} = \frac{1-b^x}{1-b^{\omega}}$$

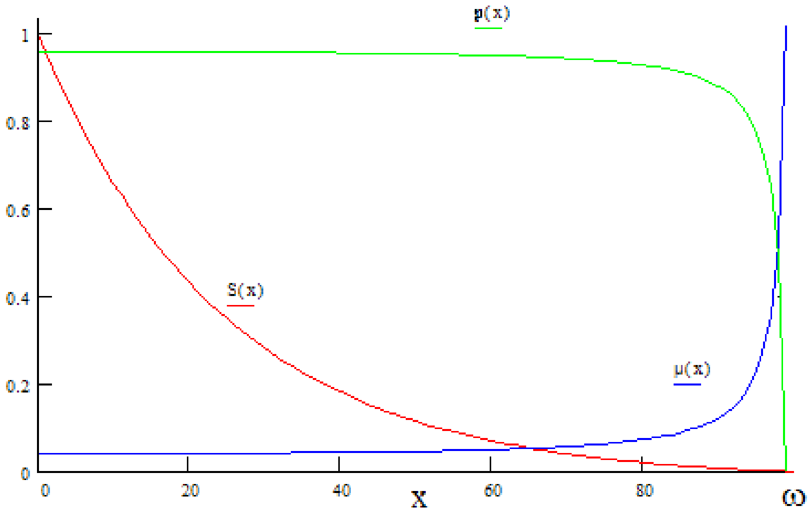
Resultando la función de densidad: $f(x) = F'(x) = -\frac{\ln(b).b^x}{1-b^{\omega}}$

Que son las funciones de supervivencia distribución y densidad de una distribución exponencial truncada para valores $X \in [0,\omega]$ con un valor del parámetro $\alpha = -\ln(b)$.

En efecto, por ejemplo, para la función de densidad nos quedaría:

$f(x) = -\frac{\ln(b).b^x}{1-b^{\omega}} = \frac{\alpha \cdot e^{-\alpha x}}{1-e^{-\alpha\omega}} = \frac{1}{F_{\exp(\alpha)}(\omega)} \alpha \cdot e^{-\alpha x}$ E, igualmente podríamos comprobarlo para F(x) o S(x)

En este gráfico se muestran las funciones de supervivencia, tanto instantáneo de mortalidad y probabilidad anual de supervivencia, para un modelo de supervivencia de Sang con b=0.96:



En cuanto a la distribución de la vida residual a la edad x, tendremos que :

$$g_x(t) = {}_t p_x \cdot \mu(x+t) = \frac{b^t - b^{\omega-x}}{1-b^{\omega-x}} \frac{\ln(b)}{(b^{\omega-x-t}-1)} = \frac{b^t(1-b^{\omega-x-t})}{1-b^{\omega-x}} \frac{\ln(b)}{(b^{\omega-x-t}-1)} = -\frac{b^t \ln(b)}{1-b^{\omega-x}}$$

Que vuelve a ser, de nuevo, la función de densidad de una exponencial truncada, esta vez entre [0,ω-x]

La esperanza de la variable *vida residual* será la esperanza de vida en x:

$$\bar{e}_x = E[T] = \int_0^{\omega-x} t \cdot \left(-\frac{b^t \ln(b)}{1-b^{\omega-x}}\right) dt = -\frac{\ln(b)}{1-b^{\omega-x}} \int_0^{\omega-x} t.b^t dt$$

resolviendo por partes:

u=t du=dt

dv=$b^t dt$ v=$\dfrac{b^t}{\ln(b)}$

$$\bar{e}_x = -\frac{\ln(b)}{1-b^{\omega-x}} \cdot \left(\left[\frac{tb^t}{\ln(b)}\right]_0^{\omega-x} - \int_0^{\omega-x} \frac{b^t}{\ln(b)} dt = \right)$$

$$= -\frac{1}{1-b^{\omega-x}} \cdot \left(\left[tb^t\right]_0^{\omega-x} - \int_0^{\omega-x} b^t dt \right) = -\frac{1}{1-b^{\omega-x}} \cdot \left((\omega-x)b^{\omega-x} - \left[\frac{b^t}{\ln(b)}\right]_0^{\omega-x} \right) =$$

$$= -\frac{1}{1-b^{\omega-x}} \cdot \left((\omega-x)b^{\omega-x} - \left(\frac{b^{\omega-x}-1}{\ln(b)}\right)\right) = -\frac{1}{1-b^{\omega-x}} \cdot \left((\omega-x)b^{\omega-x} + \left(\frac{1-b^{\omega-x}}{\ln(b)}\right)\right) =$$

$$= -\frac{(\omega-x)b^{\omega-x}}{1-b^{\omega-x}} - \frac{1}{\ln(b)}$$

Y la vida residual probable v_x la podemos obtener a partir de que :

$$_{v_x}p_x = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{b^{v_x} - b^{\omega-x}}{1-b^{\omega-x}} = \frac{1}{2} \Rightarrow b^{v_x} = \frac{1}{2}(1-b^{\omega-x}) + b^{\omega-x} \Rightarrow \frac{1}{2}(1+b^{\omega-x}) \Rightarrow$$

$$\text{tomando logaritmos} \Rightarrow v_x \ln(b) = \ln(1+b^{\omega-x}) - \ln 2 \Rightarrow$$

$$v_x = \frac{\ln(1+b^{\omega-x}) - \ln 2}{\ln(b)}$$

Modelo	ley de Sang	
enunciado	La supervivencia es función exponencial (decreciente) de la edad más una constante	
Distribución de X	Exponencial (α=-ln(b)) truncada al intervalo (0,ω)	
l(x)	$\frac{l_0}{1-b^{\omega}}(b^x - b^{\omega})$	
d_x	$\frac{l_0}{1-b^{\omega}} b^x (1-b)$	
p_x	$\frac{b-b^{\omega-x}}{1-b^{\omega-x}}$	
q_x	$\frac{1-b}{1-b^{\omega-x}}$	
μ_x	$\frac{\ln(b)}{(b^{\omega-x}-1)}$	
$_np_x$	$\frac{b^n - b^{\omega-x}}{1-b^{\omega-x}}$	
$_nq_x$	$\frac{1-b^n}{1-b^{\omega-x}}$	
S(x)	$\frac{(b^x - b^{\omega})}{1-b^{\omega}}$	(x→exp(α= –ln(b)|truncada a [0,ω]))
F(x)	$\frac{1-b^x}{1-b^{\omega}}$	(x→exp(α= –ln(b)|truncada a [0,ω]))
f(x)	$-\frac{\ln(b).b^x}{1-b^{\omega}}$	(x→exp(α= –ln(b)|truncada a [0,ω]))
g_x(t)	$-\frac{b^t \ln(b)}{1-b^{\omega-x}}$	(T_x→exp(α= –ln(b)|truncada a [0,ω-x]))
e_x	$-\frac{(\omega-x)b^{\omega-x}}{1-b^{\omega-x}} - \frac{1}{\ln(b)}$	
V_x	$\frac{\ln(1+b^{\omega-x}) - \ln 2}{\ln(b)}$	