

El sonido de las fracciones: una propuesta interdisciplinaria de enseñanza



Una teoría musical debe ser establecida como un conjunto de axiomas, definiciones y teoremas, cuyas demostraciones deben derivarse por medio de una lógica apropiada.

Milton Babbitt (1916 –2011), compositor y matemático

Cuando iniciamos la andadura de Musymáticas, y de esto ya hace más de tres años, advertíamos de nuestra intención de convertir la sección un espacio abierto a la colaboración. El trabajo que presentaremos a continuación responde a este deseo relacionando profesores de diferentes procedencias con un interés común por la Música y las Matemáticas.

La experiencia didáctica que presentaremos resume parte del trabajo desarrollado en una Tesis de Maestría en el Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN de México. Una muestra del interés de la propuesta es que muy pronto estará disponible de forma pública y gratuita en la dirección <http://www.icyt.df.gob.mx/>, gracias a que ha sido seleccionada para esto en un concurso organizado por el Instituto de Ciencia y Tecnología del Distrito Federal (México).

Por mucho que en esta sección se tenga asumida la relación entre Música y Matemáticas, está claro que si en cualquier aula se pregunta a los estudiantes sobre su afinidad por una u otra disciplina, rara vez las matemáticas serían las más favorecidas. Aunque no podemos negar que es complejo conocer todas las razones que contribuyen a configurar los gustos personales de nuestros alumnos, una explicación de su preferencia puede buscarse en la concepción que se construye en la escuela acerca de cada una de ellas.

La música forma parte de las actividades lúdicas que se llevan a cabo en la escuela y emerge de manera natural entre las expresiones emocionales de los estudiantes tanto dentro, como fuera del contexto escolar. Mientras que, a pesar de que saben que las matemáticas ocupan un lugar de gran relevancia académica dentro del currículum escolar, pocas veces viven las matemáticas como una actividad lúdica fuera de la escuela.

Desde una perspectiva pedagógica, la clase de música se asume como un espacio de intercambio de expresiones, actitudes y aptitudes artísticas entre los estudiantes. Por el contrario, las matemáticas generalmente se han cargado de formalismo y complejidad, por lo que muchos alumnos prefieren alejarse de ellas sin lograr apreciar su belleza.

Luis A. Conde Solano
Olimpia Figueras Mourut de Montpellier
François C. B. Pluinage

Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN, México. Departamento de Matemática Educativa.

Vicente Liern Carrión
Universitat de València Estudi General
musymaticas@revistasuma.es

Las acepciones mencionadas configuran a las matemáticas y a la música en los extremos tanto curriculares, como de aceptación por parte de los estudiantes, y por qué no reconocerlo, también de los docentes, sobre todo de aquellos profesores que tienen a su cargo todas las materias escolares. Esto ha creado un abismo ficticio entre las dos disciplinas, y en consecuencia un desaprovechamiento de la riqueza cognitiva y didáctica que subyace en sus relaciones y que puede emplearse para la construcción de conocimientos significativos.

En este trabajo se describe la estructura general de un acercamiento didáctico interdisciplinario que conecta contenidos escolares de matemáticas, música y física, especialmente ideado para la educación primaria. También se incluyen ejemplos de cómo a través de diferentes experimentaciones que componen la propuesta se favorece una interacción entre maestros y/o estudiantes con dichas relaciones.

Visión integradora de contenidos

En numerosas publicaciones se pone énfasis en la necesidad de crear propuestas curriculares interdisciplinarias que propicien la construcción de un aprendizaje significativo de las matemáticas. Sin embargo, los ejemplos exhibidos resultan forzados y lejanos de la realidad de los maestros y de los estudiantes. Sin duda, este no es el caso de las matemáticas y la música, entre las que existen vínculos con significado en cada una de ellas.

Por ejemplo, en Liern (2011) se describen relaciones entre las fracciones y algunos elementos musicales que pueden utilizar los maestros para la enseñanza del tema. En esta misma línea se sitúa la propuesta de Conde (2009), diseñada para explorar la interdisciplinariedad entre la música, la física y las matemáticas, mediada además, por la tecnología y la informática. Para estructurar la propuesta se conjugaron los elementos de las distintas disciplinas que se mencionan a continuación:

- de la física se toman aspectos relacionados con el estudio del sonido, el cuál se fundamenta en la percepción y transmisión de ese objeto físico;
- de la música se consideran elementos rítmicos como las figuras y silencios musicales con los cuales se establece un sistema de símbolos que determina la duración del sonido o su ausencia en intervalos de tiempo medidos por una unidad considerada como una unidad relativa;
- de las matemáticas se estudia la medida del tiempo, considerando intervalos determinados en segundos. Al realizar comparaciones entre la unidad de medida establecida y los intervalos de tiempo que se desea medir, necesariamente se debe hacer uso de los números fraccionarios, y
- de la informática, se aprovecha la posibilidad de usar la tecnología como una herramienta cognitiva que posibilita la incorporación de actividades exploratorias en el ambiente real y en

el ambiente computacional. Además, permite una representación del paso del tiempo apoyada en la visualización.

La propuesta se estructura por medio de dos componentes: un diseño curricular y un ambiente computacional. Y la secuencia didáctica está diseñada para que, de manera guiada, los alumnos puedan construir relaciones, descubrir propiedades y comprender y realizar operaciones con números fraccionarios en el contexto de la música.

De la matemática escolar se toman los números fraccionarios como objeto de estudio, por su gran riqueza y su complejidad en los procesos de enseñanza y de aprendizaje. Respecto a la música se centra la atención en lo que se ha llamado un sistema de signos musicales (SSM) compuesto por las figuras y silencios musicales, porque cuenta con una estructura matemática asociada al sistema matemático de signos de las fracciones (en el sentido, por ejemplo, de Filloy y Rojano (1991)). Si fijamos el orden redonda, blanca, negra, etc. se cumple la propiedad siguiente:

Cada figura es la mitad de la anterior y el doble de la siguiente.

En este SSM convergen aspectos de las disciplinas mencionadas, cada una de ellas con contenidos específicos: el sonido (contenido de la física), la medida del tiempo y las fracciones (contenido de las matemáticas) y las figuras y los silencios musicales (contenido de la música). Estas nociones se vinculan por medio de un sistema que determina el tiempo de duración de un sonido.

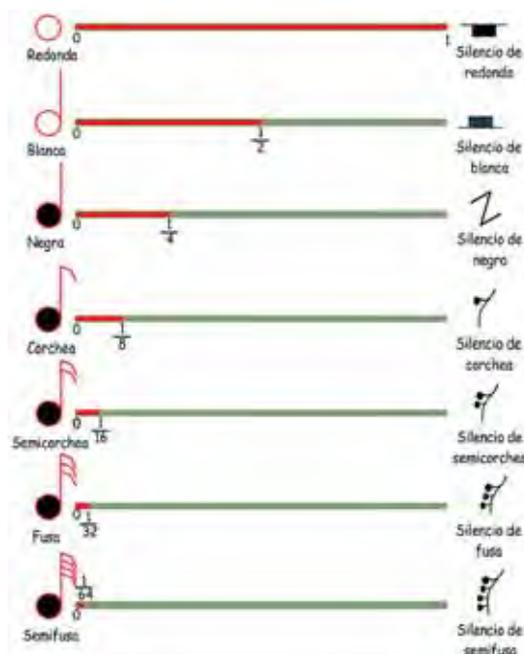


Ilustración 1. Sistema de Signos Musicales (SSM) de figuras y silencios musicales

Una de las posibilidades que ofrece el estudio del SSM desde la perspectiva de la matemática escolar y mediante experimentaciones virtuales y reales, es un acercamiento simultáneo a las nociones del tiempo físico y el tiempo musical. Acercamiento que, en la propuesta que se describe, apunta a una de las mayores dificultades enfrentadas por los estudiantes en el proceso de aprendizaje de las fracciones: la identificación de la unidad en la que se realiza la equipartición. Con este SSM se puede identificar de manera natural la figura redonda, con la *unidad* determinada por *el tiempo de duración del sonido asociado a la figura redonda*. A través del valor de la redonda se pueden deducir los valores de las demás figuras musicales. Cabe precisar que el valor en tiempo físico que se le asigna a la redonda depende de varios factores que se relacionan con la estructura rítmica y la velocidad de la interpretación de una obra, de ahí que a la unidad se le denomine *unidad relativa*.

La forma de articular la propuesta es a través de siete módulos que tienen por objeto conducir a los estudiantes en la búsqueda de respuestas a las cuestiones. Los módulos están conectados entre sí, pero a su vez tienen propósitos de aprendizaje independientes, lo que permite al profesor decidir cuáles y en qué orden desea introducir a sus alumnos al estudio de las nociones en juego, según sus intereses, la disponibilidad del tiempo, y los recursos técnicos y físicos con los que cuenta.

A continuación se describe brevemente cada uno de los módulos, cada uno de ellos con imagen incluida en el ambiente computacional del módulo que lo identifica y a través de la cual se accede a las actividades que lo conforman.

1. ¿Por qué se escucha el sonido?

El primer módulo se centra en el tratamiento del sonido como tema elemental de la música. En él se presentan simulaciones de objetos en vibración y se propone el contacto con objetos reales que también vibran, tales como cajas de resonancia y diapasones. La experimentación que se sugiere en este módulo aporta argumentos para la comprensión de la producción y propagación del sonido.



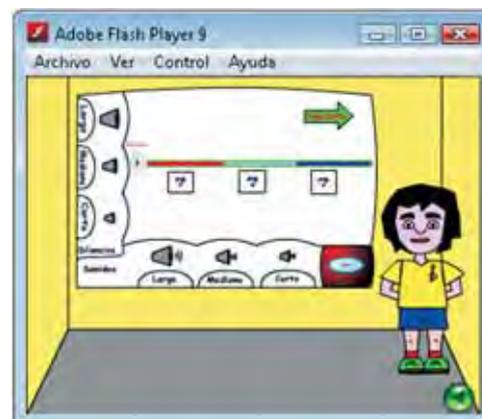
2. ¿Cómo se distinguen los sonidos?

Se propone la comparación entre la longitud de las cuerdas simuladas en el monacordio, de tal forma que los estudiantes puedan percibir cómo cambia el sonido de acuerdo con la longitud de la cuerda. También se propone la construcción y manipulación de un botellófono, para identificar sonidos graves y agudos y establecer una relación entre el sonido producido y la cantidad de agua de la botella. Subyacen en esta construcción nociones de proporcionalidad.



3. ¿Qué es ritmo?

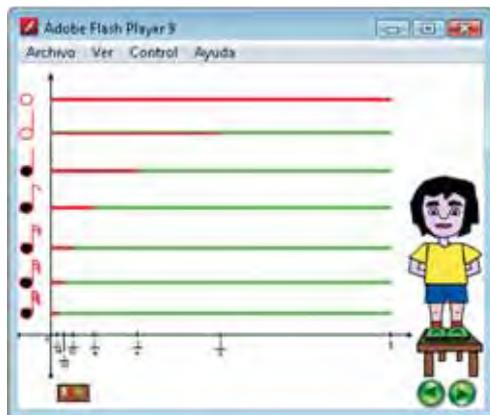
Sin abandonar la noción de sonido, en este módulo se incorpora otro componente fundamental: el tiempo. Mediante múltiples interacciones y comparaciones entre sonidos y silencios, el estudiante puede identificar sonidos y silencios largos y cortos determinando la duración por medio del uso del reloj o cronómetro. Al construir patrones rítmicos se promueve la necesidad de crear un código para representar por escrito secuencias sonoras.



4. ¿Cómo se mide la duración de los sonidos y los silencios en música?

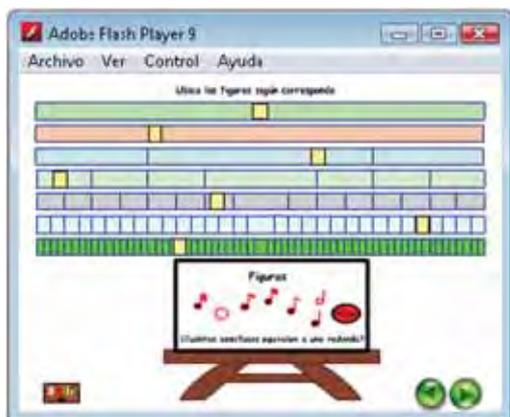
En este módulo se involucra al estudiante con el uso de un lenguaje que se construye a partir del valor relativo de la uni-

dad de medida. Las representaciones le ayudan a establecer una relación de orden entre las figuras mediante la fracción del tiempo de duración de los sonidos. Las experimentaciones proponen problemas referentes a la composición de una obra con un tiempo determinado para comparar el tiempo físico y el tiempo musical.



5. ¿Cómo se construyen equivalencias?

Se pretende establecer relaciones de equivalencias entre las figuras y silencios teniendo en cuenta la fracción del tiempo de duración. La argumentación se apoya en representaciones visuales, auditivas y corporales mediante la interpretación de patrones. Los alumnos a través de experimentaciones podrán interpretar composiciones de manera simultánea usando diferentes instrumentos musicales.



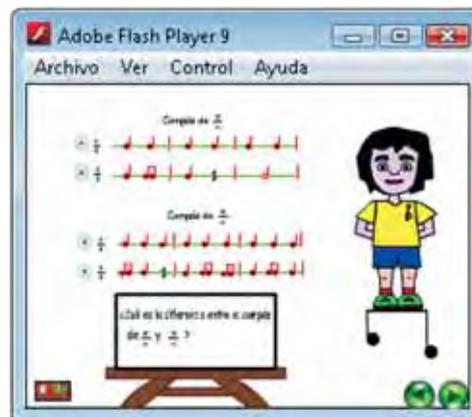
6. ¿Cómo completar unidades?

Por medio de las operaciones se pueden construir cantidades expresadas en tiempos de duración menores, iguales, y mayores que la unidad. Los ejercicios propuestos tienen una estructura de ecuación, en la cual el estudiante debe identificar el término desconocido. La igualdad entre una fracción y una adición de fracciones es una equivalencia que juega un papel importante en este acercamiento.



7. ¿Qué es compás?

La medida de una obra musical está determinada por una unidad, el estudiante por medio de las actividades de este módulo construye agrupaciones de tiempos o pulsaciones en grupos de 2, 3 ó 4, de esta forma puede llegar a tener una idea clara sobre el compás. En esta situación se puede concebir el compás como un producto o una suma sucesiva de tiempo de duración de figuras musicales, es decir de sonidos asociados a figuras musicales.



Experiencias matemáticas

Una de las preocupaciones expresadas por maestros en talleres y charlas sobre este tipo de propuestas, es la de no contar con conocimientos suficientes acerca de los contenidos de las disciplinas que se consideran. Sirva como ejemplo el comentario que una maestra hizo al respecto:

[...] A pesar del interés que los estudiantes manifestaron por la música, debí tomar la decisión de trabajar formalmente los contenidos de las matemáticas y no adentrarme en otros temas, ya que al agregar más elementos al desarrollo de la clase se dificulta el aprendizaje por parte de los estudiantes (Conde, 2009, p. 140).

Estas inquietudes no son ajenas a los intereses de los autores y se coincide con Papert (1993) quien afirma que los procesos de innovación en las escuelas se llevan a cabo de manera lenta debido a la resistencia de los profesores a lo desconocido. La cita de Papert está relacionada con el proceso de incorporación de las tecnologías digitales en el aula por parte de los maestros, y se hace alusión a ella para confrontar las hipótesis de los autores:

Los objetos musicales, como las tecnologías digitales, pueden ser recursos poderosos para la construcción significativa de los conocimientos matemáticos escolares.

No obstante, esta secuencia didáctica, como todas las propuestas novedosas que el maestro desee incorporar en sus clases, requiere de una amplia exploración de sus estructuras tanto conceptuales, como didácticas, con el fin de que se logren hacer adaptaciones asertivas para los propósitos de aprendizaje que se quiere promover entre los estudiantes. Precisamente por esto se propone como temas básicos el sonido y el tiempo, que pueden caracterizarse desde cada una de las disciplinas a través de percepciones naturales del ser humano.

En la sección siguiente se incluyen experiencias que forman parte de la propuesta descrita anteriormente y resultados que emergieron de su puesta en práctica con estudiantes de sexto grado de primaria (niños entre 10 y 12 años) de una escuela pública de Ciudad de México.

El pulso y tiempo

Cuando se habla de figuras musicales, implícitamente se hace referencia al tiempo y su medida. Es necesario aclarar que en este caso se trata de un medio continuo (tiempo de duración de sonido o de ausencia de éste) y el papel de las figuras musicales es discretizar este medio. Por tal motivo, cuando se dice que la blanca es la mitad del tiempo de duración de la redonda lo que quiere decir es que tiene una medida de dos pulsos ya que la medida de la redonda corresponde a cuatro pulsos en el tiempo musical.

Al definirse la redonda como la unidad de duración, surgen inquietudes cómo: ¿por qué se toma como la unidad?, ¿a qué se refiere con duración?, ¿cómo se determina la duración?, ¿cómo se mide la unidad?, ¿con qué instrumento se mide la unidad? Esto puede generar conflictos para los estudiantes cuando se les pide que encuentren la fracción de la unidad sin el uso de representaciones, pues podrían no tener claro qué deben dividir en partes iguales.

La fracción que indica el compás, que está ubicada al inicio

del pentagrama, significa que el numerador representa el número de tiempos que tendrá el compás y la fracción 1/n indica la unidad de tiempo de duración, es decir, la figura que llenará un tiempo del compás. Por ejemplo, en el compás de 3/4, el numerador 3 indica que cada compás tendrá tres pulsos o tiempos, y la fracción 1/4 indica la unidad de tiempo, en este caso la cuarta parte del tiempo de duración de una redonda, es decir en este caso, la figura negra será la unidad de medida.

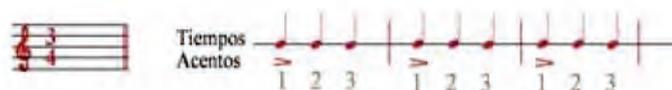
Así, el compás de 3/4 podría expresarse de la forma siguiente para verlo con mayor claridad:

Número de pulsos

$$\frac{3}{4} = 3 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

La cuarta parte de la duración de la redonda (figura negra)

Cuando se escucha un vals, se percibe un patrón rítmico de tres pulsos o tiempos. Durante todo el transcurso de la interpretación del vals se puede sentir que los patrones rítmicos están basados en el conteo: un, dos, tres. Esto indica que el patrón rítmico está agrupado en 3 pulsaciones con un acento en el primer pulso.



El pulso o pulsación se define como la medida que permite saber si un sonido es largo o corto. El pulso es el latido de la música en cada obra, al igual que el del corazón, se mide por medio del número de pulsaciones por minuto que influye en la velocidad de interpretación de la pieza.

En el estudio del pulso en una experimentación con el grupo de alumnos descrito anteriormente, ellos pudieron dar cuenta del aumento de pulsaciones por minuto mediante la comparación de sus ritmos cardiacos. El grupo se dividió en parejas, primero se midieron mutuamente el ritmo cardiaco contando el número de pulsaciones del corazón en un minuto, en estado de reposo. Después salieron a correr al patio y cuando regresaron al salón de clases se volvieron a tomar el pulso en estado de agitación.

Después de esta actividad el maestro usa un símil entre las pulsaciones del corazón y los pulsos en música, para ello él interpreta en la guitarra un ritmo de vals, variaba la velocidad de la interpretación para que los estudiantes identificaran en que situación existe un mayor número de pulsos. Con esta experiencia se pudo deducir que a mayor velocidad de la interpretación, mayor el número de pulsos por minuto y en consecuencia, menor tiempo de duración de los sonidos.

En el ambiente computacional que acompaña la propuesta didáctica se proponen escenas como la que se puede ver en la Ilustración 2, con las que se pretende que el estudiante establezca una comparación entre el tiempo físico medido en segundos y el tiempo musical medido en pulsos. Para lograr el objetivo se hacen simulaciones con animaciones simultáneamente con sonido.

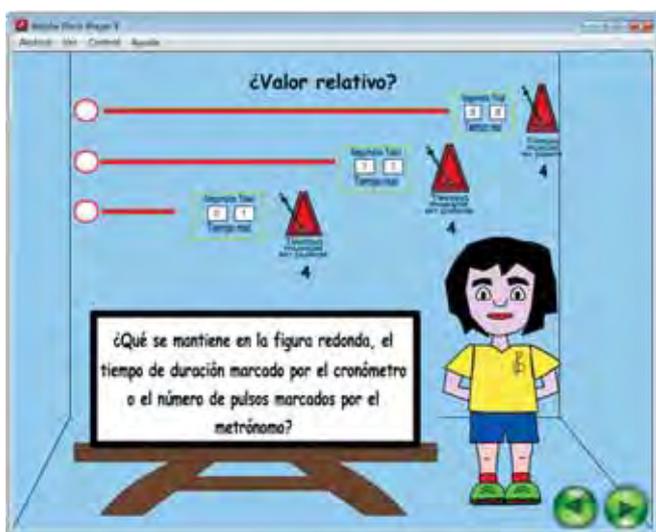


Ilustración 2. Escena del ambiente computacional de la propuesta interdisciplinaria

Los estudiantes, apoyados en la simulación de la escena, pudieron percibir la variación de la figura redonda respecto al tiempo físico y la conservación de la misma en el tiempo musical medida en 4 pulsos. También pudieron comprender la adición de fracciones a través de la construcción de magnitudes, teniendo en cuenta el tiempo medido en pulsos; la unidad ya no está determinada por la longitud de la barra, sino por el tiempo de duración marcado por un metrónomo.

Sonidos y tiempo

Las escenas de la pantalla interactiva que aparece en la Ilustración 3 contiene un ejercicio en el que se disponen tres 'barras de sonido', cada una fraccionada con tiempos de dura-

ción de sonidos y silencios. A través de la comparación de estas barras de sonido, apoyada en la representación visual y auditiva, el estudiante puede construir relaciones de equivalencia, por ejemplo: $1/3$ de la duración de la barra superior es equivalente a $2/6$ de la barra inmediatamente inferior y a $3/9$ de la última barra.

Para la pregunta: ¿Qué tienen en común las barras de sonido?, se esperan dos respuestas:

- las barras tienen el mismo tiempo de duración total, con la visualización como apoyo a la justificación; y
- tienen el mismo patrón rítmico, es decir, en todas las barras se perciben dos sonidos seguidos de un silencio.

En relación con la pregunta: ¿Qué diferencias encuentras entre las barras de sonido?, la respuesta esperada es: las barras tienen diferentes fraccionamientos de tiempo de duración de sonidos, lo que se puede apreciar gráficamente y auditivamente.

Con respecto a la pregunta ¿El tiempo de duración de sonidos son iguales en las tres barras?, se espera que los estudiantes determinen que tienen diferentes tiempos de duración.



Ilustración 3. Particiones de la unidad, duración de los sonidos y silencios

Posteriormente a la exploración de las animaciones de las barras y frente a la pregunta: ¿Qué tienen en común las barras de sonido?, estudiantes que participaron en la experimentación opinaron:

- Estudiante 1: “Que todas están divididas en iguales partes”.
- Estudiante 2: “Que todas las barras terminan hasta cierto tiempo”.
- Estudiante 3: “Cambia el ritmo”.
- Estudiante 4: “Que las tres tienen silencios”.

Los estudiantes pudieron encontrar las similitudes respecto a la duración total de las barras, empero en un inicio tuvieron dificultades al identificar el patrón rítmico, algunos de ellos consideraron que cambiaba cada barra en su estructura. Sin embargo, con la comparación de dos sonidos sucesivos y un silencio, secuencia que se reproduce en cada barra, se logró disipar la idea inicial sobre un cambio de patrón.

Por medio de la pregunta: ¿Qué diferencias encuentras entre las barras de sonido?, los alumnos identificaron el tiempo como factor determinante en la duración de los sonidos en cada barra. Sin embargo, surge una situación no prevista en la planeación, los alumnos identificaron dos tipos de tiempo:

- ellos reconocieron que en cada una de las barras el tiempo de duración responde a la misma fracción entre sus sonidos y silencios y
- los estudiantes reconocieron que las tres barras tienen el mismo tiempo total de duración.

Con estos parámetros, los alumnos al realizar comparaciones entre las barras sobre los sonidos y silencios determinaron que las duraciones de los sonidos en los tres casos son diferentes. Se puede poner en evidencia dicha determinación con las respuestas a la pregunta ¿el tiempo de sonido es igual en las tres barras?:

- Estudiante 1: “El tamaño es igual” [se refiere al tiempo de duración total de las barras].
- Estudiante 2: “Es más corto” [se refiere a la longitud de la fracción de la barra que se ilumina, comparado con una fracción iluminada de otra barra].
- Estudiante 3: “Es más largo”.

Los estudiantes también hallaron la expresión en fracción del tiempo de duración de los sonidos y silencios que compone cada barra y establecieron relaciones de equivalencia entre ellas en términos de sus duraciones. Las relaciones que encontraron los alumnos son:

- “La duración de un sonido de la barra superior (ver Ilustración 3) se expresa como $\frac{1}{3}$ de su duración total de la barra” (unidad de referencia).
- “En la barra de la mitad la duración de un sonido es de $\frac{1}{6}$ de su duración total”.
- “En la barra inferior la duración de un sonido es $\frac{1}{9}$ de su duración total”.

Aprovechando el momento, de acuerdo con las relaciones anteriores se planteó la pregunta: ¿Cuántos novenos se requieren para completar $\frac{1}{3}$?, a lo que el Estudiantes 1 respondió 3. Esta pregunta no exigió mayor esfuerzo para los estudiantes ya que la expresión fraccionaria de las barras comparadas se percibe de forma inmediata en la Ilustración 3. Luego se planteó la pregunta: ¿Cuántos novenos necesito para completar $\frac{1}{6}$? Se obtuvieron las siguientes respuestas:

- Estudiante 1: “Uno y medio”.
- Estudiante 2: “Uno y un cachito”.

En este caso se percibió confusión por parte de los estudiantes; la equivalencia no se puede comprobar de forma inmediata en la representación gráfica que aparece en la Ilustración 3. Frente a esto, una niña (la estudiante 2) logró deducir de la gráfica la expresión correcta:

El maestro puede aprovechar, tanto las expresiones que emergen, por ejemplo la respuesta de la niña, para socializar con todo el grupo, como la pregunta para seguir profundizando en el estudio de los contenidos de la actividad.

Con esta actividad se provee de experiencias a los estudiantes a través de las cuales ellos pueden comparar intervalos de tiempo de duración de sonidos para establecer relaciones de orden y equivalencia expresando unos intervalos de tiempo de duración en términos de otros.

Figuras fraccionarias

El propósito de este conjunto de exploraciones es dar significado matemático a las figuras y los silencios musicales, dotando de sonido las figuras vinculadas simultáneamente al movimiento de una barra como representación de la fracción de duración del sonido. Por medio de la experimentación entre sonido y movimiento, el estudiante realiza comparaciones para establecer relaciones entre las figuras considerando sus valores de duración representados por fracciones. El reconocimiento del valor relativo de la unidad es importante en el momento de deducir la duración de las demás figuras.

Durante la puesta en marcha de la propuesta didáctica que se ha descrito se observaron dos aspectos fundamentales. El primero es que, por medio de la exploración de una escena del interactivo que muestra el contenido de la Ilustración 1, el estudiante puede reconocer la unidad y a partir de ella construir las demás figuras. Es preciso mencionar que una de las dificultades en el trabajo con los números fraccionarios es que el estudiante identifique la unidad de medida a tratar, situación que en muchas ocasiones se pasa por alto y se da por hecho originando limitaciones y problemas para el desarrollo del proceso de aprendizaje del campo de los números fraccionarios. El segundo aspecto es que, debido a la representación gráfica y la percepción sonora se hace explícita la partición de la unidad al igual que la partición de las particiones. Con ello se da la posibilidad a los estudiantes de establecer una relación de orden entre las figuras y expresar una fracción en términos de otras. En este caso, no sólo existe una relación sim-

bólica (figura-fracción) sino que además tiene un significado de medida asociado al tiempo de duración de un sonido.

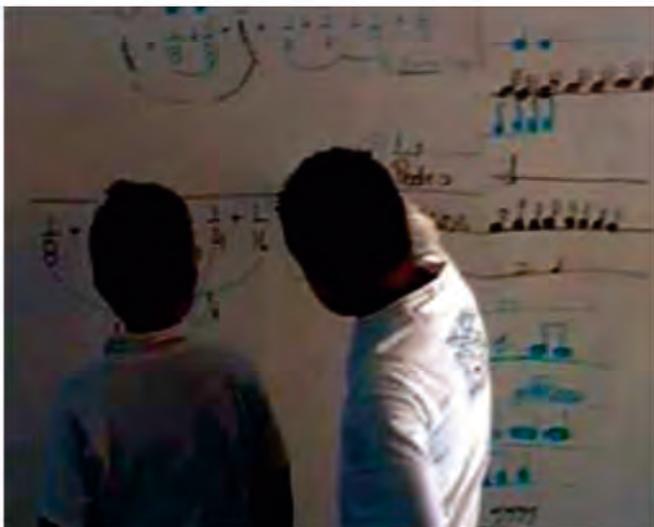


Ilustración 4. Estudiantes practicando con música y fracciones

En cuanto a discusiones en torno a la pregunta: ¿Qué sucede si continuamos reduciendo a la mitad la duración de un sonido?, los jóvenes opinaron lo siguiente:

- Estudiante 1: "Son más cortas las duraciones".
- Estudiante 2: "Se hacen más pequeñas".
- Estudiante 3: "¿Y no se puede escuchar?"
- Estudiante 4: "No".

Este cuestionamiento genera una discusión propicia para indagar sobre el estudio del sonido como fenómeno físico. Situación que el maestro puede determinar de acuerdo con sus intereses, ya sea estableciendo diferencias entre percibir un sonido según su frecuencia, intensidad o duración. Por otro lado, se puede usar esta actividad como transición de un fenómeno real a una construcción abstracta. Es decir, que a

partir de la estructura de las figuras podemos extender el proceso profundizando en un campo matemático al desarrollar la sucesión de la forma $1/2^n$, cuya expresión puede ser hallada por los estudiantes, a partir de los primeros términos: 1, $1/2$, $1/4$, $1/8$, etc.

Reflexiones finales

A partir de las relaciones entre matemáticas y música se proponen nuevos materiales y estrategias didácticas diferentes a las usadas tradicionalmente, como el uso de contextos en los que aparecen galletas, pasteles y/o pizzas, para la enseñanza y el aprendizaje de los números fraccionarios.

Los estudiantes necesitan experiencias versátiles que les proporcionen herramientas de comprobación y argumentación para dar cuenta, por sus propios medios, sobre la construcción y el significado de un concepto estudiados. Estos diferentes acercamientos y representaciones que el estudiante tiene con los objetos matemático-musicales caracterizan los procesos de concretización de dichos objetos (Wilensky, 1991). En consecuencia el maestro también requiere de propuestas flexibles que le permitan realizar ajustes y adaptaciones teniendo en cuenta los actores del contexto escolar para potenciar las herramientas y favorecer la actividad matemática de la clase.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente subvencionado por los proyectos de investigación TIN2008-06872-C04-02 del Ministerio de Ciencia e Innovación.

MUSYMÁTICAS ■

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Conde, L. A. (2009). *Las fracciones al ritmo de la música*. Tesis de Maestría no publicada, México D. F.: Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.
- Filloy, E. and Rojano, T. (1991). *Translating from natural language to the mathematical system of algebraic signs and viceversa*, en R.G. Underhill (ed.), *Proceedings of the Thirteenth Annual Meeting for the Psychology of Mathematics Education*, North American 1, pp 29-35. Blacksburg, USA.
- Liern, V. (2011). Música y matemáticas en educación primaria. *Suma*, 66, pp. 107 – 113.
- Papert, S. (1993). *La máquina de los niños. Replantearse la educación en la era de los ordenadores*. Barcelona: Paidós.
- Wilensky, U. (1991). Abstract Meditations on the Concrete, and Concrete Implications for Mathematics Education. En Harel, I. & Papert, S. (Eds.) *Constructionism*, pp. 193 – 204. Norwood, New Jersey: Ablex Publishing Corporation,