

ALGUNAS CUESTIONES DE ELECTROMAGNETISMO LECCIONES 1 A 10
(2004-2005)

1. En una esfera de radio a tenemos una carga Q distribuida de modo que crea un campo eléctrico radial de intensidad:

$$E_r = \frac{k}{2\epsilon_0} \quad , \quad 0 < r < a$$

siendo k una constante. Suponer que dentro y fuera de la esfera hay vacío.

¿Cuál es la densidad de carga con que está distribuida la carga Q ? ¿Cuánto vale el campo eléctrico en la región externa a la esfera ($r > a$)?

2. Deducir los dos primeros términos del desarrollo multipolar del potencial electrostático, $\phi = \phi(\vec{r})$, para el caso de una distribución arbitraria de carga $\rho = \rho(\vec{r}')$. Definir el momento monopolar (carga total) y el momento dipolar de la distribución.

Ayuda: Utilizar uno de estos dos desarrollos:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^3} + \dots \qquad \frac{1}{R} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{r'}{r} \right)^n P_n(\cos \theta)$$

3. Se tiene una espira circular de radio a en el plano XY, centrada en el origen de coordenadas. Por dicha espira circula una intensidad que varía lentamente con el tiempo de valor

$$i(t) = i_0 e^{-t/\tau}$$

donde i_0 y τ son constantes. Considerando la aproximación dipolar magnética de la espira, calcular el campo magnético que crea la espira en los puntos del eje Z. Razonar qué dirección tendrá el campo eléctrico inducido en torno al eje Z. Calcular el campo eléctrico inducido en puntos próximos al eje Z.

4. Una onda electromagnética plana, armónica y linealmente polarizada se propaga en el vacío en la dirección del vector (1,2,3). La amplitud del campo eléctrico de dicha onda es 17 V/m, y su frecuencia es 60 MHz. En el instante $t=8$ ns el campo eléctrico de dicha onda vale (9,0,-3) V/m en el origen de coordenadas. Encontrar una expresión para el campo eléctrico y para el campo magnético de dicha onda en cualquier punto del espacio e instante de tiempo.

5. A partir de las ecuaciones de Maxwell en el vacío, deducir las ecuaciones diferenciales que satisfacen el potencial escalar eléctrico ϕ y el potencial vector magnético $\vec{A}$.

A partir de estas ecuaciones generales, imponer la condición del contraste (gauge) de Lorentz, obteniendo las ecuaciones diferenciales correspondientes. ¿Cuáles son las ventajas de imponer tal condición en los potenciales?

6. El promediado espacial de las ecuaciones de Maxwell para los campos microscópicos en un medio material nos conduce al siguiente resultado:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho - \nabla \cdot \vec{P}}{\epsilon_0} \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \nabla \times \vec{M} + \mu_0 \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

¿Cuáles son los términos nuevos que aparecen respecto a las ecuaciones de Maxwell en el vacío?

¿Qué significado físico tienen?. Definir el vector desplazamiento eléctrico ($\vec{D}$) y el vector excitación magnética ($\vec{H}$), transformando las anteriores ecuaciones en las ecuaciones de Maxwell en los medios materiales.

Las ecuaciones de Maxwell en los medios materiales deducidas en el apartado anterior ¿se modifican si el medio es no lineal?

8. Escribir las ecuaciones de Maxwell válidas en medios materiales. Definir los diferentes términos y su significado físico. Deducir las condiciones que deben de satisfacer los campos $\vec{E}$ y $\vec{H}$ en la interfase de separación entre dos medios dieléctricos de constantes ϵ_1 y ϵ_2

9. Por una espira cuadrada de lado “a” circula una corriente I(t). Calcular la fuerza electromotriz inducida en un hilo muy largo situado a una distancia “b” de uno de los lados de la espira cuadrada. Recuerdese que el coeficiente de inducción mutua es simétrico

10. Una distribución superficial de carga sobre el plano x,y , de forma arbitraria, tiene un momento dipolar resultante $\vec{p} = 25\vec{k}$ C.m. Discutir y razonar sobre la validez de esta afirmación en los dos casos siguientes:

La carga total es nula

La carga total no es nula

11. Una onda electromagnética plana y monocromática de 300 Mhz se propaga en el vacío a lo largo del eje z. El campo eléctrico es paralelo al eje x y alcanza su valor máximo de 350 V/m en el punto (0,0,1) y en el instante t= 0. Expresar el campo eléctrico y magnético en función de la posición y el tiempo.

12. Dos esferas de radios a y b están cargadas con cargas Q y q respectivamente y separadas una

distancia c . Analizar y responder en los supuestos siguientes:

Sean las esferas conductoras. ¿cómo será la distribución de carga?. ¿uniforme? ¿superficial?

Sean las esferas no conductoras con una distribución superficial de carga uniforme. Calcular el campo eléctrico en todo el espacio

¿Cuál es la dificultad, si la hay, de calcular el campo eléctrico en todo el espacio para el supuesto "a2"?

13. Sea una distribución de corriente $K \vec{u}_j$ en una esfera de radio a . Calcular el campo magnético a grandes distancias de la esfera.

14. Por una espira cuadrada de lado " a " circula una corriente $I(t)$. Calcular la fuerza electromotriz inducida en un hilo muy largo situado a una distancia " b " de uno de los lados de la espira cuadrada. Recuérdese que el coeficiente de inducción mutua es simétrico

15. Una onda electromagnética plana y monocromática de 300 Mhz se propaga en el vacío a lo largo del eje z . El campo eléctrico es paralelo al eje x y alcanza su valor máximo de 350 V/m en el punto (0,0,1) y en el instante $t=0$. Expresar el campo eléctrico y magnético en función de la posición y el tiempo.

16. Deducid los dos primeros términos del desarrollo multipolar del potencial electrostático, $\phi = \phi(\vec{r})$, para el caso de una distribución arbitraria de carga $\rho = \rho(\vec{r}')$. Definir el momento monopolar y el momento dipolar de la distribución.

Ayuda: Utilizar uno de estos dos desarrollos:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^3} + \dots \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{r'}{r} \right)^n P_n(\cos \theta)$$

17. Decir si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones explicando el porqué:

Si hay flujo magnético sobre un circuito filiforme cerrado aparece una fuerza electromotriz inducida.

El coeficiente de inducción mutua entre dos circuitos es siempre negativo.

La ley de Lenz afirma que la fuerza electromotriz inducida en un circuito tiende a oponerse a la causa que la produce.

18. Proponer la expresión del campo eléctrico de una onda electromagnética plana armónica de frecuencia angular $\omega = 5 \times 10^6$ rad/s, que se propaga en un medio material sin pérdidas caracterizado por $\epsilon_r = 9$ y $\mu_r = 1$. La onda se propaga en la dirección del vector (2,2,2), y su vector campo eléctrico tiene polarización lineal con dirección paralela al plano XY; el módulo del campo eléctrico es 10 V/m. Obtener la expresión del campo $\vec{H}$ asociado.

19. El potencial coulombiano de apantallamiento en un medio conductor se puede expresar por:

$$f = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{-\frac{r}{\lambda}}}{r}$$

Calcular el campo eléctrico y la densidad de carga correspondientes.

20. Un toroide de radio medio R y sección S , esta formado por dos medios toroides de materiales con permeabilidades μ_1 y μ_2 . Bobinado entorno a el se encuentra una espira de N vueltas. Calcular el coeficiente de autoinducción de dicho toroide.

21. Se tiene dos dipolos magnéticos $\vec{m}_1$ y $\vec{m}_2$ separados una distancia "a" (ver figura).

Por consideraciones físicas determinar el sentido de la fuerza en las dos configuraciones de la figura. Calcular la fuerza magnética que ejerce uno sobre otro en ambos casos.

22 Supongamos que la ley de interacción entre cargas puntuales fuera:

$$F = (q_1 q_2 / (4\pi\epsilon_0 r^2))(1 + r/\lambda) \exp(-r/\lambda) u_r$$

Donde λ es una nueva magnitud con un valor del orden de la mitad del radio del universo. Calcular el potencial, si procediera. Razonar las nuevas ecuaciones de Maxwell de la electrostática.

23. Calcular la capacidad de un condensador de placas plano paralelas en cuyo interior la mitad esta ocupada por un dieléctrico de constante ϵ . La distancia entre placas es d y la superficie S .

24. Cuales son las condiciones en la superficie de separación entre dos medios magnéticos referidas al potencial vector?. Supóngase aplicado el gauge de Coulomb.

25. Un disco de vinilo de radio R , tiene una densidad de carga superficial σ y esta girando a una velocidad angular ω (45 r.p.m.). ¿Calcular el momento magnético que aparece?.

26. Escribir, en un punto (x,y,z) el campo eléctrico y el magnético de una onda electromagnética plana, de frecuencia ω , linealmente polarizada, que se propaga en la dirección del eje x con sentido $-\hat{u}_x$. El campo eléctrico tiene amplitud E_0 y la dirección $\hat{u}_y$.

27. Sea una espira circular de radio "a" muy pequeña por la que circula una corriente I . Con el mismo centro y con un radio "b" mucho mayor existe otra espira circular. Calcular la fuerza electromotriz inducida en la segunda espira cuando $I = I_0 \sin \omega t$

28. Escribir las ecuaciones de Maxwell de los campos eléctrico E y magnético B en un medio de permitividad ϵ y permeabilidad μ . Tengase en cuenta que ϵ y μ , no son necesariamente constantes.

29. Sean dos cilindros metálicos coaxiales de radios a y b ($a < b$) muy largos. El cilindro exterior tiene una densidad de carga superficial σ . Calcular el potencial en todo el espacio.