



Programa

Lección 11

Ondas electromagnéticas en medios materiales

- 11.1 Introducción.
- 11.2 Ecuación de ondas en los medios materiales.
- 11.3 Ondas planas en medios no conductores.
- 11.4 Ondas planas en medios conductores.
- 11.5 Reflexión y transmisión en una interfase plana entre dos medios.



Bibliografía

Lección 11

Ondas electromagnéticas en medios materiales

Griffiths

Lección 8

Marshall

Lección 9

Pomer

Lección 12

Wangsness

Lección 24



Ondas electromagnéticas en medios materiales

Ecuación de ondas en los medios materiales

$$\nabla \vec{D} = 0 \quad \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad \nabla \vec{B} = 0 \quad \nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J}$$

$$\nabla \vec{E} = 0 \quad \nabla (\nabla \vec{E}) - \Delta \vec{E} + \mu \frac{\partial \nabla \times \vec{H}}{\partial t} = 0$$

$$\nabla \vec{H} = 0$$

$$\Delta \vec{E} - \mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad \Delta \vec{H} - \mu \sigma \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta \psi + \omega^2 \mu \varepsilon \left(1 + \frac{i}{\omega \tau} \right) \psi = 0$$



Ondas electromagnéticas en medios materiales

Ondas planas en medios no conductores

$$\Delta \psi - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta \psi_s + k^2 \psi_s = 0$$

$$\frac{d^2 \psi_s(z)}{dz^2} + k^2 \psi_s(z) = 0 \quad \psi(z, t) = \psi_0 e^{i(kz - \omega t)} \quad n = \frac{k}{k_0}$$

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\frac{\epsilon \mu}{\epsilon_0 \mu_0}} = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$$

$$n^2 = \epsilon_r$$

	n^2	ϵ_r
N ₂	1.00058	1.00058
C ₂ H ₆	2.253	2.284
S ₂ C	2.644	2.640
H ₂ O	1.77	81



Ondas electromagnéticas en medios materiales

Ondas planas en medios no conductores

$$\vec{u} \times \vec{E}_0 = Z \vec{H}_0 \quad \vec{H}_0 = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \vec{u} \times \vec{E}_0 \quad Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

$$Z_o = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi \, \Omega$$

$$\omega = \omega(k)$$

$$\psi(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{ikz - i\omega(k)t} dk$$

$$\omega(k) = \omega(k_0) + \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} (k - k_0) \cdots \quad A(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(z, 0) e^{ikz} dz$$



Ondas electromagnéticas en medios materiales

Ondas planas en medios no conductores

$$\omega(k) = \omega(k_0) + \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} (k - k_0) \dots$$

$$\psi(z, t) \approx e^{i \left[k_0 \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0 - \omega_0 \right] t} \int_{-\infty}^{\infty} A(k) e^{ik \left[z - \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0 t \right]} dk = \psi \left(z - \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0 t, 0 \right) e^{i \left[k_0 \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0 - \omega_0 \right] t}$$

$$z - \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0 t \quad v_g = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_0 \quad \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu} + \frac{\omega}{2\epsilon} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{d\epsilon}{d\omega}} = \frac{v}{1 + \frac{\omega}{2\epsilon} \frac{d\epsilon}{d\omega}}$$



Ondas electromagnéticas en medios materiales

Ondas planas en medios conductores

$$k^2 = \omega^2 \mu \epsilon \left(1 + \frac{i}{\omega \tau} \right)$$

$$k = \beta + \frac{i\alpha}{2}$$

$$\frac{\alpha}{2} = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \sqrt{\frac{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega \tau} \right)^2} - 1}{2}}$$

$$\beta = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \sqrt{\frac{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega \tau} \right)^2} + 1}{2}}$$

$$\psi(z, t) = \psi_0 e^{-\frac{\alpha z}{2}} e^{i(\beta z - \omega t)}$$

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon} \sqrt{\frac{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega \tau} \right)^2} + 1}{2}}}$$



Ondas electromagnéticas en medios materiales

Ondas planas en medios conductores

$$\frac{k}{k_0} = \frac{\beta}{k_0} + \frac{i\alpha}{2k_0} = n + i\kappa$$

$$\vec{H}_0 = \frac{\beta + i\frac{\alpha}{2}}{\omega \mu} \vec{u}_x \vec{E}_0$$

$$\vec{H}_0 = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \left(1 + \frac{1}{\omega^2 \tau^2}\right)^{1/4} e^{i\phi} \vec{u}_x \vec{E}_0 = \frac{\vec{u}_x \vec{E}_0}{Z} \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{\alpha}{2\beta}\right) = \frac{1}{2} \tan^{-1}\left(\frac{1}{\omega\tau}\right)$$

$$\beta = \omega \sqrt{\mu\epsilon} \left(1 + \frac{1}{8\omega^2 \tau^2}\right)$$

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left(1 - \frac{i}{2\omega\tau}\right) \quad \beta = \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\mu\sigma\omega}{2}} = \frac{1}{\delta} \quad \psi(z, t) = \psi_0 e^{-z/\delta} e^{i(z/\delta - \omega t)}$$



Ondas electromagnéticas en medios materiales

Ondas planas en medios conductores

$$\vec{H} = \vec{H}(0) e^{-(1-i)z/\delta}$$

$$\vec{H} = \vec{H}_t e^{-(1-i)z/\delta}$$

$$\vec{E} = \frac{\vec{J}}{\sigma} = -\frac{1}{\sigma} \vec{n} \times \frac{\partial \vec{H}}{\partial z}$$

$$\vec{E} = \frac{(1-i)}{\sigma\delta} e^{-(1-i)z/\delta} \vec{n} \times \vec{H}_t$$

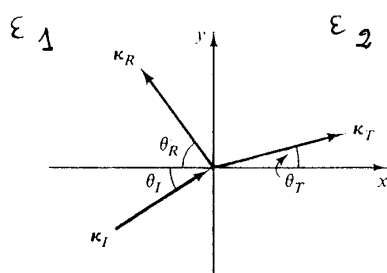
$$\vec{E}_t = \frac{(1-i)}{\sigma\delta} \vec{n} \times \vec{H}_t$$

$$\vec{n} \times \vec{E} = -\frac{(1-i)}{\sigma\delta} \vec{H} = -\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}} (1-i) \vec{H} = -\frac{\omega\mu\delta}{2} (1-i) \vec{H}$$



Ondas electromagnéticas en medios materiales

Reflexión y transmisión en una interfase plana entre dos medios.



$$\vec{E}_I(\vec{r}, t) = \vec{E}_{0I} e^{i(\vec{k}_I \vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{B}_I(\vec{r}, t) = \frac{1}{v_1} (\vec{k}_I \times \vec{E}_I)$$

$$\vec{E}_R(\vec{r}, t) = \vec{E}_{0R} e^{i(\vec{k}_R \vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{B}_R(\vec{r}, t) = \frac{1}{v_1} (\vec{k}_R \times \vec{E}_R)$$

$$\vec{E}_T(\vec{r}, t) = \vec{E}_{0T} e^{i(\vec{k}_T \vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{B}_T(\vec{r}, t) = \frac{1}{v_2} (\vec{k}_T \times \vec{E}_T)$$



Ondas electromagnéticas en medios materiales

Reflexión y transmisión en una interfase plana entre dos medios

$$\omega = k_I v_1 = k_R v_1 = k_T v_2$$

$$k_I = k_R = \frac{v_2}{v_1} k_T = \frac{n_1}{n_2} k_T$$

$$\begin{aligned} \vec{E}_I + \vec{E}_R \\ \vec{B}_I + \vec{B}_R \end{aligned} \quad \left(\right) e^{i(\vec{k}_I \vec{r} - \omega t)} + \left(\right) e^{i(\vec{k}_R \vec{r} - \omega t)} = \left(\right) e^{i(\vec{k}_T \vec{r} - \omega t)} \quad \text{en } x = 0$$

$$\vec{k}_I \vec{r} = \vec{k}_R \vec{r} = \vec{k}_T \vec{r} \quad \text{en } x = 0$$

$$(k_I)_y y + (k_I)_z z = (k_R)_y y + (k_R)_z z = (k_T)_y y + (k_T)_z z \quad \forall y, z$$

$$(k_I)_z = (k_R)_z = (k_T)_z \qquad (k_I)_y = (k_R)_y = (k_T)_y$$



Ondas electromagnéticas en medios materiales

Reflexión y transmisión en una interfase plana entre dos medios.

Conclusiones (leyes de la óptica geométrica)

a) Los ángulos incidente, reflejado y transmitido forman el plano de incidencia

b) Los ángulos incidente, reflejado son iguales

$$k_I \sin \theta_I = k_R \sin \theta_R = k_T \sin \theta_T \quad \theta_I = \theta_R$$

c) Ley de Snell

$$\frac{\sin \theta_T}{\sin \theta_I} = \frac{n_1}{n_2}$$

V. Muñoz Sanjosé

Electromagnetismo

Curso 2002-2003



Ondas electromagnéticas en medios materiales

Reflexión y transmisión en una interfase plana entre dos medios.

$$\varepsilon_1 (\vec{E}_{0_I} + \vec{E}_{0_R})_x = \varepsilon_2 (\vec{E}_{0_T})_x$$

$$(\vec{B}_{0_I} + \vec{B}_{0_R})_x = (\vec{B}_{0_T})_x$$

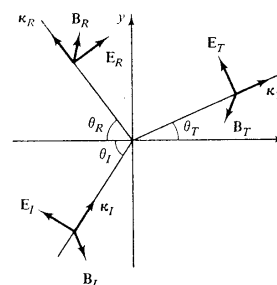
$$(\vec{E}_{0_I} + \vec{E}_{0_R})_{y,z} = (\vec{E}_{0_T})_{y,z}$$

$$\frac{1}{\mu_1} (\vec{B}_{0_I} + \vec{B}_{0_R})_{y,z} = \frac{1}{\mu_2} (\vec{B}_{0_T})_{y,z}$$

$$\vec{B}_0 = \frac{1}{v} (\vec{k} \times \vec{E}_0)$$

$$\varepsilon_1 (-E_{0_I} \sin \theta_I + E_{0_R} \sin \theta_R) = \varepsilon_2 (-E_{0_T} \sin \theta_T)$$

$$(E_{0_I} \cos \theta_I + E_{0_R} \cos \theta_R) = (E_{0_T} \cos \theta_T)$$



V. Muñoz Sanjosé

Electromagnetismo

Curso 2002-2003



Ondas electromagnéticas en medios materiales

Reflexión y transmisión en una interfase plana entre dos medios.

$$\frac{1}{\mu_1 \nu_1} (E_{0_I} - E_{0_R}) = \frac{1}{\mu_2 \nu_2} E_{0_T} \quad (E_{0_I} - E_{0_R}) = \beta E_{0_T}$$

$$\beta = \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{n_2}{n_1} \quad \vec{E}_{0_I} + \vec{E}_{0_R} = \alpha \vec{E}_{0_T} \quad \alpha = \frac{\cos \theta_T}{\cos \theta_I}$$

Ecuaciones de Fresnel

$$\vec{E}_{0_R} = \frac{(\alpha - \beta)}{(\alpha + \beta)} \vec{E}_{0_I} \quad \vec{E}_{0_T} = \frac{2}{(\alpha + \beta)} \vec{E}_{0_I}$$



Ondas electromagnéticas en medios materiales

Reflexión y transmisión en una interfase plana entre dos medios.

$$\vec{E} = \vec{E}_0 f(\vec{u}\vec{r} - v_1 t) \quad \vec{H} = \frac{\vec{u} \times \vec{E}}{\mu_1 v_1}$$

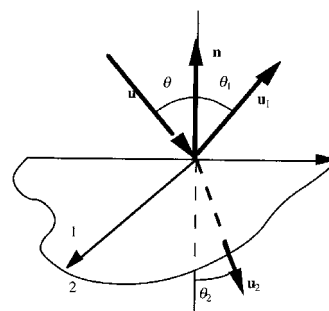
$$\vec{E}_2 = \vec{E}_{2,0} f_2(\vec{u}_2 \vec{r} - v_2 t) \quad \vec{H}_2 = \frac{\vec{u}_2 \times \vec{E}_1}{\mu_2 v_2}$$

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{1,0} f_1(\vec{u}_1 \vec{r} - v_1 t) \quad \vec{H}_1 = \frac{\vec{u}_1 \times \vec{E}_1}{\mu_1 v_1}$$

$$\frac{\vec{u} \vec{r}}{v_1} = \frac{\vec{u}_2 \vec{r}}{v_2} = \frac{\vec{u}_1 \vec{r}}{v_1} \quad \vec{n} \vec{r} = 0 \quad \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{r}) = (\vec{n} \vec{r})\vec{n} - n^2 \vec{r} = -\vec{r}$$

$$[(\vec{u} - \vec{u}_1) \times \vec{n}] (\vec{n} \times \vec{r}) = 0$$

$$\left[\left(\frac{\vec{u}_1}{v_1} - \frac{\vec{u}_2}{v_2} \right) \times \vec{n} \right] (\vec{n} \times \vec{r}) = 0$$



V. Muñoz Sanjosé

Electromagnetismo

Curso 2002-2003



Ondas electromagnéticas en medios materiales

Reflexión y transmisión en una interfase plana entre dos medios.

$$\theta = \theta_1 \quad \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{v_1}{v_2} = n_{2,1} \quad \vec{n} \times (\vec{E} + \vec{E}_1) = \vec{n} \times \vec{E}_2$$

$$\frac{\vec{n} \times (\vec{u} \times \vec{E} + \vec{u}_1 \times \vec{E}_1)}{\mu_1 v_1} = \frac{\vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{E}_2)}{\mu_2 v_2} \quad E_0 + E_{1,0} = E_{2,0}$$

$$E_0 \cos \theta - E_{1,0} \cos \theta_1 = \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2} E_{2,0} \cos \theta_2$$

$$E_{2,0} = \frac{2 \cos \theta}{\cos \theta + \frac{\mu_1}{\mu_2} \sqrt{n_{2,1}^2 - \sin^2 \theta}} E_0 \quad E_{1,0} = \frac{\cos \theta - \frac{\mu_1}{\mu_2} \sqrt{n_{2,1}^2 - \sin^2 \theta}}{\cos \theta + \frac{\mu_1}{\mu_2} \sqrt{n_{2,1}^2 - \sin^2 \theta}} E_0$$

V. Muñoz Sanjosé

Electromagnetismo

Curso 2002-2003



Ondas electromagnéticas en medios materiales

Reflexión y transmisión en una interfase plana entre dos medios.

$$\vec{n} \cdot \vec{H} = \vec{n} \cdot \vec{H}_2 = \vec{n} \cdot \vec{H}_1 = 0$$

$$H_0 + H_{1,0} = H_{2,0}$$

$$H_0 \cos \theta - H_{1,0} \cos \theta_1 = \frac{\mu_2 v_2}{\mu_1 v_1} H_{2,0} \cos \theta_2$$

$$H_{2,0} = \frac{2 \cos \theta}{\cos \theta + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \sqrt{n_{2,1}^2 - \sin^2 \theta}} H_0$$

$$H_{1,0} = \frac{\cos \theta - \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \sqrt{n_{2,1}^2 - \sin^2 \theta}}{\cos \theta + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \sqrt{n_{2,1}^2 - \sin^2 \theta}} H_0$$

$$\vec{n} \times (\vec{E} + \vec{E}_1) = 0$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{H} + \vec{H}_1) = 0$$

$$v_f = \frac{\lambda}{T \sin \theta} = \frac{c}{\sin \theta} \geq c$$

$$\vec{E} = 2 \vec{E}_0 \sin(kz) \cos(\omega t)$$