Programa

Lección 12
La energía electrostática

- 12.1 Introducción
- 12.2 Energía de una carga en presencia de un campo eléctrico exterior
- 12.3 Energía electrostática de un sistema de cargas puntuales.
- 12.4 Energía electrostática de una distribución de cargas
- 12.5 Energía en función de los campos. Densidad de energía
- 12.6 Energía de un dipolo eléctrico
- 12.7 Energía de Polarización

Bibliografía

Lección 12
La energía electrostática

Griffiths	Lección	2
Pomer	Lección	9
Reitz-Milford-Christy	Lección	6
Wangsness	Lección	7

La energía electrostática

Energía de una carga en presencia de un campo eléctrico exterior

$$W_1^2 = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}\, d\vec{r} = -q \int_{r_1}^{r_2} \vec{E}_0 \, d\vec{r} = q\left[\phi_0(\vec{r}_2) - \phi_0(\vec{r}_1)\right]$$

$$\vec{E}_0 = -\nabla \phi_0 \qquad\qquad U = W_\infty^r = -q \int_{\infty}^{r} \vec{E}_0 \, d\vec{r} = q\phi_0(\vec{r})$$

$$U = \sum_i q_i \, \phi_0(\vec{r}_i)$$

La energía electrostática

Energía electrostática de un sistema de cargas puntuales

$$W_1 = q_2 \phi_{1,2} \qquad\qquad W_1 = \frac{1}{2}\left(q_1 \phi_{2,1} + q_2 \phi_{1,2}\right)$$

$$W_2 = q_3 \left(\phi_{1,3} + \phi_{2,3}\right) = q_1 \phi_{3,1} + q_2 \phi_{3,2}$$

$$W_1 + W_2 = \frac{1}{2}\left[q_1\left(\phi_{2,1} + \phi_{3,1}\right) + q_2\left(\phi_{1,2} + \phi_{3,2}\right) + q_3\left(\phi_{1,3} + \phi_{2,3}\right)\right]$$

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i \sum_{j \neq i} \phi_{j,i} \qquad \phi_i = \sum_{j \neq i} \phi_{j,i} \qquad U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i \phi_i$$

$$U = W = \sum_{i=1}^{n} q_i \sum_{j < i} \phi_{j,i}$$

La energía electrostática

Energía electrostática de una distribución de cargas

(en un campo externo)

$$U = \int_V \rho(\vec{r})\phi_o(\vec{r})\,dv$$

La energía electrostática

Energía electrostática de una distribución de cargas

$$\rho\,(\vec{r},\alpha_1) = 0 \qquad\qquad \rho\,(\vec{r},\alpha_2) = \rho\,(\vec{r})$$

$$\delta\, W = \int_V \delta\rho\left(\vec{r},\alpha\right)\phi\,(\vec{r},\alpha)\, dv = \delta\alpha \int_V \frac{\partial\rho}{\partial\alpha}\phi\; dv$$

$$U = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \partial\alpha \int_V \frac{\partial\rho}{\partial\alpha}\,\phi\; dv$$

$$U = \int_V dv \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \delta\alpha \left(\frac{\partial(\rho\phi\,)}{\partial\alpha} - \rho\,\frac{\partial\phi}{\partial\alpha} \right) = \int_V \rho\phi\; dv - \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \delta\alpha \int_V \rho\,\frac{\partial\phi}{\partial\alpha}\; dv$$

La energía electrostática

Energía electrostática de una distribución de cargas

$$\int_V \rho(\vec{r},\alpha)\frac{\partial\phi}{\partial\alpha}dv = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\int_V \rho(\vec{r},\alpha)dv\int_V \frac{\partial\rho(\vec{r}\,',\alpha)}{\partial\alpha}\,\frac{dv'}{R} =$$

$$= \int_V \frac{\partial\rho}{\partial\alpha}dv\,\frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r},\alpha)}{R}dv' = \int_V \frac{\partial\rho}{\partial\alpha}\phi\,dv$$

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\int_V \rho(\vec{r})\phi(\vec{r})\,dv}$$

Caso particular de una distribución de carga formada por dos volúmenes disjuntos

$$U = \frac{1}{2}\int_{V_1} \rho_1(\vec{r})\phi(\vec{r})\,dv + \frac{1}{2}\int_{V_2} \rho_2(\vec{r})\phi(\vec{r})\,dv$$

$$\phi = \phi_{1,1} + \phi_{2,1} \qquad en \quad V_1$$

$$\phi = \phi_{2,2} + \phi_{1,2} \qquad en \quad V_2$$

$$U = \frac{1}{2}\int_{V_1} \rho_1(\vec{r})\phi_{1,1}(\vec{r})\,dv + \frac{1}{2}\int_{V_1} \rho_1(\vec{r})\phi_{2,1}(\vec{r})\,dv + \frac{1}{2}\int_{V_2} \rho_2(\vec{r})\phi_{1,2}(\vec{r})\,dv + \frac{1}{2}\int_{V_2} \rho_2(\vec{r})\phi_{2,2}(\vec{r})\,dv$$

La energía electrostática

Energía electrostática de una distribución de cargas

$$\int_{V_1} \rho_1(\vec{r})\phi_{2,1}(\vec{r})\,dv = \int_{V_1} \rho_1(\vec{r})\,dv \int_{V_2} \frac{\rho_2(\vec{r}\,')\,dv'}{4\pi\,\varepsilon_o R}$$

$$\int_{V_1} \rho_1(\vec{r})\phi_{2,1}(\vec{r})\,dv = \int_{V_2} \rho_2(\vec{r})\,dv \int_{V_1} \frac{\rho_1(\vec{r}\,')\,dv'}{4\pi\,\varepsilon_o R} = \int_{V_{21}} \rho_2(\vec{r})\phi_{1,2}(\vec{r})\,dv$$

$$U = \frac{1}{2}\int_{V_1} \rho_1(\vec{r})\phi_{1,1}(\vec{r})\,dv + \int_{V_1} \rho_1(\vec{r})\phi_{2,1}(\vec{r})\,dv + \frac{1}{2}\int_{V_2} \rho_2(\vec{r})\phi_{2,2}(\vec{r})\,dv = U_1 + U_i + U_2$$

$$U_i = \int_{V_1} \rho_1(\vec{r})\phi_{2,1}(\vec{r})\,dv = \int_{V_2} \rho_2(\vec{r})\phi_{1,2}(\vec{r})\,dv$$

La energía electrostática

Energía en función de los campos. Densidad de energía

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\int_V \rho(\vec{r})\phi(\vec{r})\,dv}$$

$$2U = \int_V \phi\,\nabla\vec{D}\,dv = \int_S \phi\,\vec{D}\,d\vec{S} - \int_V \vec{D}\,\nabla\phi\,dv$$

$$U = \frac{1}{2}\int_V \vec{E}\,\vec{D}\,dv$$

$$u = \frac{1}{2}\vec{E}\,\vec{D}$$

Si tenemos medios dieléctricos

$$\delta\,U = \int_V \phi\;\nabla\delta\,\vec{D}\,dv = \int_V \vec{E}\,\delta\,\vec{D}\;dv$$

$$U = \int_V dv \int_0^D \vec{E}\,\delta\,\vec{D}$$

$$U = \frac{1}{2}\int_V \vec{E}\,\vec{D}\,dv$$

La energía electrostática

Energía de un dipolo eléctrico

En un campo externo

$$U = \lim_{\vec{a}\to 0,\, q\to\infty} \left[-q\phi_0(\vec{r}) + q\phi_0(\vec{r}+\vec{a})\right] = \lim_{\vec{a}\to 0,\, q\to\infty} q\vec{a}\,\nabla\phi_0 \qquad U = -\vec{p}\,\vec{E}_0$$

Dipolo polarizable

$$\delta\, W = \int_V \delta\rho\,\phi\, dv \qquad U = \int\int_V \delta\rho\,\phi_0\, dv + \int\int_V \delta\rho\,\phi_p\, dv$$

$$U_p = \int\int_{V_p} \delta\rho_p\,\phi_0\, dv \qquad U_p = \int\int_{V_p} \phi_0\,\delta\,\vec{p}\,\nabla\delta\left(\vec{r}-\vec{r}_0\right) dv$$

$$U_p = \int_0^p \delta\,\vec{p}\nabla\phi_0 = -\int_0^p \vec{E}_0\delta\,\vec{p} \qquad U_p = -\frac{\vec{p}\vec{E}_0}{2}$$

La energía electrostática

Energía de polarización

$$\delta\, U_p = \int \left(\delta\, \vec{D}\, \vec{E} - \delta\, \vec{D}_0\, \vec{E}_0\right) dv \qquad \delta\, \vec{D}_0\, \vec{E}_0 = \vec{D}_0 \delta\, \vec{E}_0$$

$$\delta\, \vec{D} \vec{E} - \vec{D}_0 \delta\, \vec{E}_0 = \left(\vec{D} - \vec{D}_0\right) \delta\, \vec{E}_0 + \vec{E}\left(\delta\, \vec{D} - \delta\, \vec{D}_0\right) - \vec{D} \delta\, \vec{E}_0 + \vec{E} \delta\, \vec{D}_0$$

$$\int \left(\vec{D} - \vec{D}_0\right) \delta\, \vec{E}_0\, dv \qquad \delta\, \vec{E}_0 = -\delta\, \nabla \phi_0 \qquad \int \nabla\left(\vec{D} - \vec{D}_0\right) \delta\, \phi_0\, dv = 0$$

$$\int \vec{E}\left(\delta\, \vec{D} - \delta\, \vec{D}_0\right) dv = 0$$

$$\delta\, U_p = -\int \left(\vec{D} \delta\, \vec{E}_0 - \vec{E} \delta\, \vec{D}_0\right) dv = -\int \left(\vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E}\right) \delta\, \vec{E}_0\, dv$$

La energía electrostática

Energía de polarización

$$\delta U_p = -\int_V \vec{P}\delta\,\vec{E}_0\,dv$$

$$U_p = -\int_V dv \int_0^{E_0} \vec{P}\delta\,\vec{E}_0$$

$$U = -\frac{1}{2}\int_V \vec{P}\vec{E}_0\,dv$$