Programa

Lección 14
La energía electromagnética

- 14.1 Introducción
- 14.2 Conservación de la energía. Teorema de Poynting y vector de Poynting
- 14.3 Teorema de Poynting para campos armónicos. Expresión compleja
- 14.4 Energía radiada por un dipolo eléctrico y un dipolo magnético

Bibliografía

Lección 14
La energía electromagnética

Griffiths	Lección	7
Jackson	Lección	6
Pomer	Lección	11
Reitz-Milford-Christy	Lección	16

La energía electromagnética

Conservación de la energía.
Teorema de Poynting y vector de Poynting

$$\vec{H}\,\nabla x\vec{E} - \vec{E}\,\nabla x\vec{H} + \vec{H}\,\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E}\,\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = -\vec{J}\vec{E}$$

$$\vec{N} = \vec{E}x\vec{H}$$

$$\nabla\vec{N} + \vec{H}\,\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E}\,\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = -\vec{J}\vec{E}$$

$$\int_V \left(\vec{H}\,\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E}\,\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) dv + \int_S \vec{N}\,d\vec{S} = -\int_V \vec{J}\vec{E}dv$$

$$-\vec{J}\vec{E} = -\frac{J^2}{\sigma} + \vec{J}\vec{E}_{em}$$

$$\vec{J}\vec{E} = \vec{J}\left(\frac{\vec{J}}{\sigma} - \vec{E}_{em}\right)$$

La energía electromagnética

Conservación de la energía.
Teorema de Poynting y vector de Poynting

$$\int_V \vec{J}\vec{E}_{em}\,dv = \int_V \frac{J^2}{\sigma}\,dv + \int_V \left(\vec{H}\,\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E}\,\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) dv + \int_S \vec{N}d\vec{S}$$

$$W_e = \frac{1}{2}\int \vec{E}\vec{D}dv \qquad W_m = \frac{1}{2}\int \vec{B}\vec{H}dv \qquad W_{em} = W_e + W_m$$

$$\int_V \vec{J}\vec{E}_{em}\,dv = \int_V \frac{J^2}{\sigma}\,dv + \int_V \frac{\partial u}{\partial t}\,dv + \int_S \vec{N}d\vec{S} \qquad -\int_V \frac{\partial u}{\partial t}\,dv = \int_V \vec{J}\vec{E}dv + \int_S \vec{N}d\vec{S}$$

$$\nabla\vec{N} + \frac{\partial u}{\partial t} = -\vec{J}\vec{E} \qquad \vec{N}' = \vec{N} + \vec{S}$$

La energía electromagnética

Conservación de la energía.

Teorema de Poynting y vector de Poynting. Algunos ejemplos

Una onda plana $$\vec{N} = \vec{E}x\frac{\vec{k}x\vec{E}}{\mu_0\omega} = \frac{\vec{k}\,E^2}{\mu_0\omega} = c\varepsilon_0 E^2\vec{n}$$

$$u = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2\right) + \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \mu_0 E^2\right) = \varepsilon_0 E^2$$

$$\vec{N} = c\,u\,\vec{n}$$

$$\nabla\vec{N} = c(\nabla u)\,\vec{n} = -c\frac{\partial u}{\partial t}$$

La energía electromagnética

Conservación de la energía.
Teorema de Poynting y vector de Poynting. Algunos ejemplos

Una corriente filiforme

$$N = \frac{i}{\pi\, a^2 \sigma} \frac{i}{2\pi\, a} = \frac{i^2}{2\pi^2\, a^3 \sigma} \qquad \int_S \vec{N}\, d\vec{S} = \frac{i^2}{\pi\, a^2 \sigma} = i^2 R$$

Carga de un condensador

$$H = \frac{i}{2\pi\, r} \frac{\partial D}{\partial t} \pi\, r^2 = \frac{\varepsilon_0\, r}{2} \frac{\partial E}{\partial t}$$

$$\int_S \vec{N}\, d\vec{S} = \frac{\varepsilon_0\, rE}{2} \frac{\partial E}{\partial t} 2\pi\, r\, d = \frac{\partial}{\partial t}\left(\pi\, r^2\, d\, \frac{\varepsilon_0\, E^2}{2}\right)$$

La energía electromagnética

Teorema de Poynting para campos armónicos. Expresión compleja

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}(\vec{r})\, e^{-i\omega t} \qquad \vec{N} = \mathrm{Re}\left[\vec{E}(\vec{r})\, e^{-i\omega t}\right] x\, \mathrm{Re}\left[\vec{H}(\vec{r})\, e^{-i\omega t}\right]$$

$$\left\langle \vec{N} \right\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \vec{N}(\vec{r},t)\, dt$$

$$\left\langle \vec{N} \right\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \vec{E}_0\, x\, \vec{H}_0\, \cos\omega t \cos(\omega t - \varphi)\, dt = \frac{\vec{E}_0\, x\, \vec{H}_0}{2}\cos\varphi$$

$$\mathrm{Re}\left(\vec{E}\, x\, \vec{H}^*\right) = \mathrm{Re}\left(\vec{E}^*\, x\, \vec{H}\right) = \vec{E}_0 x\, \vec{H}_0\, \cos\varphi = 2\left\langle \vec{N} \right\rangle$$

$$\vec{N} = \frac{\vec{E}\, x\, \vec{H}^*}{2}$$

La energía electromagnética

Teorema de Poynting para campos armónicos. Expresión compleja

$$\nabla x\, \vec{E} - i\varpi\ \vec{B} = 0 \qquad \nabla x\, \vec{H}^{*} - i\varpi\ \vec{D} = \vec{J}^{*}$$

$$\nabla x\,(\vec{E}\, x\vec{H}^{*}) + i\varpi\ (\vec{E}\,\vec{D}^{*} - \vec{B}\,\vec{H}^{*}) = -\vec{E}\,\vec{J}^{*}$$

$$\int_S \vec{N}\, d\vec{S} + \frac{i\omega}{2}\int_V (\vec{E}\,\vec{D}^{*} - \vec{B}\,\vec{H}^{*})\, dv = -\frac{1}{2}\int_V \vec{J}^{*}\ \vec{E}\, dv$$

$$\left\langle \frac{\partial U}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right\rangle = \mathrm{Re}\left[\frac{i\omega}{2}\left(\vec{E}\,\vec{D}^{*} - \vec{B}\,\vec{H}^{*} \right) \right]$$

$$\mathrm{Re}\int_S \vec{N}\, d\vec{S} + \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\int_V \vec{J}^{*}\ \vec{E}\, dv = 0 \qquad \mathrm{Re}\left[\frac{i\omega\ \vec{E}\,\vec{D}^{*}}{2} \right] = \frac{\omega\ \varepsilon''E^{2}}{2}$$

La energía electromagnética

Energía radiada por un dipolo eléctrico y un dipolo magnético

Dipolo eléctrico

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\left[\dot{\vec{p}}\right] + \frac{R^2\left[\ddot{\vec{p}}\right]}{c}\right)\frac{\vec{u}x\,\vec{R}}{R^3} \qquad \vec{E} = \left(\left[\vec{p}\right] + \frac{R\left[\dot{\vec{p}}\right]}{c}\right)\frac{3\left(\vec{u}\,\vec{R}\right)\vec{R} - R^2\vec{u}}{4\pi\ \varepsilon_0 R^5} + \left[\ddot{\vec{p}}\right]\frac{\left(\vec{u}x\,\vec{R}\right)x\vec{R}}{4\pi\ \varepsilon_0 c^2 R^3}$$

$$\vec{N} = \frac{E^2}{c\mu_0}\frac{\vec{R}}{R} = \frac{\mu_0\left[\ddot{\vec{p}}\right]^2 \sin^2\theta\ \vec{R}}{16\pi^2 cR^3}$$

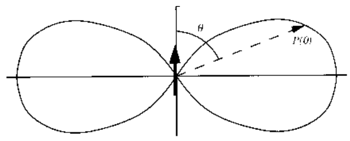

Fig. 13.1. Diagrama polar de la potència que emet un dipol harmònic

$$\frac{dU}{dt} = \int_S \vec{N}d\vec{S} = \frac{\mu_0\left[\ddot{\vec{p}}\right]^2}{8\pi c}\int_0^\pi \sin^3\theta\ d\theta = \frac{\left[\ddot{\vec{p}}\right]^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}$$

La energía electromagnética

Energía radiada por un dipolo eléctrico y un dipolo magnético

$$\vec{p} = \vec{p}_0 e^{-i\omega t} \qquad \vec{E} == \frac{p_0 e^{ikR}}{4\pi\,\varepsilon_0 R}\left[\frac{1}{R}\left(\frac{1}{R} - ik\right)\frac{3\left(\vec{u}\,\vec{R}\right)\vec{R} - R^2\vec{u}}{4\pi\,\varepsilon_0 R^5} + k^2\,\frac{\vec{R}x\left(\vec{u}x\,\vec{R}\right)}{R^2}\right]$$

$$\vec{H}_0 = -\frac{iwp_0 e^{ikR}}{4\pi R}\left(\frac{1}{R} - ik\right)\frac{\vec{u}x\,\vec{R}}{R}$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\vec{E}x\vec{H}^*\right) = \frac{\omega\left|p_0\right|^2 k^3}{32\pi^2\varepsilon_0 r^2}\sin^2\theta$$

$$\left\langle\frac{dU}{dt}\right\rangle = \frac{\mu_0\omega^4\left|p_0\right|^2}{12\pi c} = \frac{10^{-15}\omega^4\left|p_0\right|^2}{9}\,watts$$

La energía electromagnética

Energía radiada por un dipolo eléctrico y un dipolo magnético

Dipolo magnético

$$\vec{N} = \frac{\mu_0}{c}\left[\frac{m_0\omega^2}{4\pi\, c}\left(\frac{\sin\theta}{r}\right)\cos\omega\left(t - r/c\right)\right]^2 \vec{u}_r$$

$$\left\langle \vec{N} \right\rangle = \frac{\mu_0 m_0^{\,2}\omega^4}{32\pi^2 c^3}\left(\frac{\sin^2\theta}{r^2}\right)\vec{u}_r \qquad P = \frac{\mu_0 m_0^{\,2}\omega^4}{12\pi\, c^3} = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\frac{m_0^{\,2}\omega^4}{3c^5}$$