Programa

Lección 15
Las fuerzas y el momento del campo electromagnético

- 15.1 Introducción
- 15.2 Las fuerzas en el campo electrostático
- 15.3 Las fuerzas en el campo magnetostático
- 15.4 El momento del campo electromagnético. Teorema de conservación

Bibliografía

Lección 15

Las fuerzas y el momento del campo electromagnético

Griffiths	Lección	7
Jackson	Lección	6
Pomer	Lección	11
Reitz-Milford-Christy	Lección	16

Las fuerzas y el momento del campo electromagnético

Las fuerzas en el campo electrostático

$$\vec{F}_0 = q\vec{E}_0 = -\nabla U$$

Sistema aislado $\qquad \vec{F}_i = -\nabla_i U$

Sistema no aislado

Caso de un sistema de conductores a potencial fijo

$$dW_g = dW + dU$$

$$dW = dW_g - dU$$

$$U = \frac{1}{2}\sum_j f_j Q_j \qquad dU = \frac{1}{2}\sum_j f_j dQ_j$$

$$dW_g = \sum_j f_j dQ_j \qquad dW_g = 2dU \qquad dW = dU \qquad \vec{F}_i = \nabla_i U$$

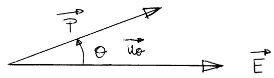
Las fuerzas y el momento del campo electromagnético

Las fuerzas en el campo electrostático

Acción sobre un dipolo en un campo exterior uniforme

$$U = -\vec{p}\vec{E}_0 \qquad \vec{F} = -\nabla\left(-\vec{p}\vec{E}_0\right) = \left(\vec{p}\nabla\right)\vec{E}_0 = 0$$

$$M_q = -\frac{\partial}{\partial q}\left(-pE_0 \cos q\right) = -pE_0 \sin q$$



$$\vec{M} = \vec{p}x\vec{E}_0$$

Las fuerzas y el momento del campo electromagnético

Las fuerzas en el campo electrostático

Acción sobre un dipolo en un campo exterior no uniforme

$$\vec{F}_{+} \neq \vec{F}_{-}$$

$$\vec{F} = -\nabla\left(-\vec{p}\vec{E}_0\right) = \left(\vec{p}\nabla\right)\vec{E}_0$$

$$\vec{M} = \left(\vec{r}x\left(\left(\vec{p}\nabla\right)\vec{E}_0\right)\right) + \vec{p}x\vec{E}_0$$

Las fuerzas y el momento del campo electromagnético

Las fuerzas en el campo electrostático

Fuerza sobre distribuciones de carga

$$d\vec{F} = \left(\vec{E} - \vec{E}_p\right) dq$$

$$\vec{F} = \int_S \left(\vec{E} - \vec{E}_p\right) s \; dS \qquad \vec{E}_p = \frac{s}{2e}\vec{u}$$

Caso de un conductor cargado con densidad superficial σ

$$\vec{E} = \frac{s}{e}\vec{u} \qquad \vec{F} = \int_S \frac{1}{2}\frac{s^{2}}{e}\vec{u}\, dS = \frac{1}{2}\int_S s \; \vec{E}\, dS$$

Fuerza sobre una distribución volúmica de carga ρ

$$d\vec{F} = \left(\vec{E} - \vec{E}_p\right) r \; dv \qquad \vec{F} = \int_V \left(\vec{E} - (\to 0)\right) r \; dv$$

Las fuerzas y el momento del campo electromagnético

Las fuerzas en el campo magnetoestático

Fuerza y momento en circuitos rígidos

$$dW = \vec{F} d\vec{r}$$

$$dW = dW_g - dU \qquad dU = \frac{1}{2}\sum_j I_j d f_j \qquad dW_g = \sum_j I_j d f_j$$

$$dW_g = 2dU \qquad \vec{F}_i = \nabla_i U \qquad M_i = \left(\frac{\partial U}{\partial q}\right)_i$$

Las fuerzas y el momento del campo electromagnético

Las fuerzas en el campo magnetoestático

Fuerza y momento sobre un dipolo magnético en un campo externo

$$\vec{M} = \vec{m} x \vec{B}$$

Campo uniforme

$$\vec{F} = 0$$

Campo no uniforme

$$\vec{F} = (\vec{m}\nabla)\vec{B}$$

Las fuerzas y el momento del campo electromagnético

El momento del campo electromagnético. Teorema de conservación

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} = \int_V \left(\vec{E} + \vec{v} x \vec{B}\right) r \; dv$$

$$r \; \vec{E} + \vec{J} x \vec{B} = \left(\nabla \vec{D}\right)\vec{E} + \left(\nabla x \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) x \vec{B}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\vec{D} x \, \vec{B}) = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \, x \, \vec{B} + \vec{D} \, x \, \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \, x \, \vec{B} - \vec{D} \, x \left(\nabla x \vec{E}\right)$$

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \, x \, \vec{B} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{D} x \, \vec{B}\right) + \vec{D} \, x \left(\nabla x \vec{E}\right)$$

$$r \; \vec{E} + \vec{J} x \vec{B} = \left(\nabla \vec{D}\right)\vec{E} - \vec{D} x \left(\nabla x \vec{E}\right) - \vec{B} x \left(\nabla x \vec{H}\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{D} x \vec{B}\right)$$

Las fuerzas y el momento del campo electromagnético

El momento del campo electromagnético. Teorema de conservación

$$\nabla\left(\vec{E}\vec{D}\right)=\vec{E}x(\nabla x\,\vec{D})+\ \vec{D}x(\nabla x\,\vec{E})+(\vec{E}\,\nabla)\,\vec{D}+(\vec{D}\,\nabla)\,\vec{E}=$$

$$=2\,\vec{D}x(\nabla x\,\vec{E})\ +2(\vec{E}\,\nabla)\,\vec{D}$$

$$-\vec{D}x\,(\nabla x\,\vec{E})=(\vec{E}\,\nabla)\,\vec{D}-\frac{1}{2}\nabla(\vec{E}\,\vec{D})$$

$$-\vec{B}x\,(\nabla x\,\vec{H})=(\vec{B}\,\nabla)\,\vec{H}-\frac{1}{2}\nabla(\vec{B}\,\vec{H})$$

Las fuerzas y el momento del campo electromagnético

El momento del campo electromagnético. Teorema de conservación

$$r\ \vec{E} + \vec{J}x\vec{B} = \left[\vec{E}\left(\nabla\vec{D}\right) + \left(\vec{E}\nabla\right)\vec{D}\right] + \left[\vec{B}\left(\nabla\vec{H}\right) + \left(\vec{B}\nabla\right)\vec{H}\right] - \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{D}x\vec{B}\right) - \frac{1}{2}\nabla\left(\vec{E}\vec{D}\right) - \frac{1}{2}\nabla\left(\vec{B}\vec{H}\right)$$

$$\vec{T} = T_{ij} = \left(D_i E_j - \frac{1}{2} d_{ij} D_i E_j\right) + \left(H_i B_j - \frac{1}{2} d_{ij} H_i B_j\right) \qquad r\ \vec{E} + \vec{J}x\vec{B} = \nabla\vec{T} - em\frac{\partial}{\partial t}\vec{N}$$

$$\left(\nabla\vec{T}\right)_j = \left[\left(\nabla\vec{D}\right)E_j + \left(\vec{E}\nabla\right)D_j - \frac{1}{2}\nabla_j\left(\vec{E}\vec{D}\right) - \frac{1}{2}\nabla_j\left(\vec{B}\vec{H}\right) + \left(\nabla\vec{H}\right)B_j + \left(\vec{B}\nabla\right)H_j\right]$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = -em\frac{d}{dt}\int_v \vec{N}dv + \int \vec{T}d\vec{S} \qquad \left(d\vec{S}\vec{T}\right)_j = \sum_{i=x,y,z} dS_i\ T_{ij}$$

Las fuerzas y el momento del campo electromagnético

El momento del campo electromagnético. Teorema de conservación

$$\int_S \overleftrightarrow{T}\, d\vec{S} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial t}\int_V \vec{N}\, dv = \int_V \left(r\, \vec{E} + \vec{J}x\, \vec{B}\right) dv$$

$$\int_S \overleftrightarrow{T}\, d\vec{S} = \int_V \left(r\, \vec{E} + \vec{J}x\, \vec{B}\right) dv = \vec{F}$$

$$\int_S \overleftrightarrow{T}\, d\vec{S} = \frac{d\vec{p}_{mec}}{dt} \quad \int_S \overleftrightarrow{T}\, d\vec{S} = \frac{d\vec{p}_{mec}}{dt} + \frac{\partial}{\partial t}\int_V \frac{\vec{N}}{c^2}\, dv \qquad \vec{g} = \frac{\vec{N}}{c^2}$$

$$\nabla \overleftrightarrow{T} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{N}}{\partial t} = 0 \qquad \frac{d}{dt}(\vec{p}_{mec} + \vec{p}_{em}) = 0$$