Programa

Lección 16
Teoría del potencial en electrostática

Bibliografía

Lección 16
Teoría del potencial en electrostática

Benito (Problemas)	Lecciones	4 y 5
Griffiths	Lección	3
Pomer	Lección	15
Reitz-Milford-Christy	Lección	3

Teoría del potencial en electrostática

El problema electrostático. Unicidad de la solución

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\phi_1 \quad ; \; \phi_2 \qquad \phi = \phi_1 - \phi_2 \qquad \phi = 0 \qquad \frac{\partial\phi}{\partial n} = 0$$

$$\int_V \left(\phi\ \nabla^2\psi + \nabla\phi\ \nabla\psi\right) dv = \int_S \phi\ \frac{\partial\psi}{\partial n}\, dS \qquad \phi = \psi$$

$$\int_V \left(\phi\ \nabla^2\psi + \left|\nabla\phi\right|^2\right) dv = \int_S \phi\ \frac{\partial\phi}{\partial n}\, dS \qquad \int_V \left(\phi\ (0) + \left|\nabla\phi\right|^2\right) dv = \int_S (0)\,(0)\, dS$$

$$\nabla\phi = 0 \qquad \phi = cte \qquad \phi_1 = \phi_2$$

Teoría del potencial en electrostática

El problema electrostático. Unicidad de la solución

$$\int_V \left(\phi\,(\vec{r}\,')\,\nabla'^2\left(\frac{1}{R}\right) - \frac{1}{R}\nabla'^2\phi \right) dv = \int_S \left[\phi\ \ \nabla'\left(\frac{1}{R}\right) - \frac{1}{R}\nabla'\phi \right] d\vec{S}\,'$$

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\ \varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{R}\,dv' + \frac{1}{4\pi}\int_S \left[\frac{1}{R}\frac{\partial\phi}{\partial n'} - \frac{\phi\ \vec{n}\,'\vec{R}}{R} \right] dS \qquad si \quad r \in V$$

$$\phi(\vec{r}) = 0 \quad si \qquad r \notin V$$

$$\sigma = \varepsilon_0\,\frac{\partial\phi}{\partial n} \qquad\qquad \vec{\tau} = -\varepsilon_0\phi\ \vec{n}$$

Teoría del potencial en electrostática

La solución formal, mediante la función de Green, del problema electrostático con condiciones de contorno

$$L\phi\left(\vec{r}\right)=f(\vec{r}) \qquad \nabla'^2\, G\left(\vec{r},\vec{r}'\right)=\delta\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)$$

$$G\left(\vec{r},\vec{r}'\right)=-\frac{1}{4\pi\ R}+F(\vec{r},\vec{r}') \qquad \nabla'^2 F\left(\vec{r},\vec{r}'\right)=0$$

$$\phi\left(\vec{r}\right)=-\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V G(\vec{r},\vec{r}')\rho(\vec{r}')dv'+\int_S\left[\phi\,\frac{\partial G}{\partial n'}-G\,\frac{\partial\phi}{\partial n'}\right]dS'$$

$$G(\vec{r},\vec{r}')=0 \qquad si \quad \vec{r}' \ \in S$$

$$\phi\left(\vec{r}\right)=-\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V G(\vec{r},\vec{r}')\rho(\vec{r}')dv'+\int_S \phi(\vec{r}')\,\frac{\partial G\left(\vec{r},\vec{r}'\right)}{\partial n'}\,dS'$$

Teoría del potencial en electrostática

La solución formal, mediante la función de Green, del problema electrostático con condiciones de contorno

$$\int_S \frac{\partial G(\vec{r},\vec{r}\,')}{\partial n'}\, dS' = 1 \qquad\qquad \frac{\partial G(\vec{r},\vec{r}\,')}{\partial n'} = \frac{1}{S} \qquad si \quad \vec{r}\,' \in S$$

$$\phi(\vec{r}) = \langle \phi \rangle_S - \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V G(\vec{r},\vec{r}\,')\rho(\vec{r}\,')dv' - \int_S G(\vec{r},\vec{r}\,')\frac{\partial \phi(\vec{r}\,')}{\partial n'}\, dS'$$

$$G(\vec{r},\vec{r}\,') = G(\vec{r}\,',\vec{r})$$

$$G = \frac{1}{2}\ln R + F \qquad\qquad \left(R^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2\right)$$

$$G = \frac{1}{2}\left|z - z'\right| + F$$

Teoría del potencial en electrostática

El método de las imágenes

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\ \varepsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{R}\, dv' + \phi_h$$

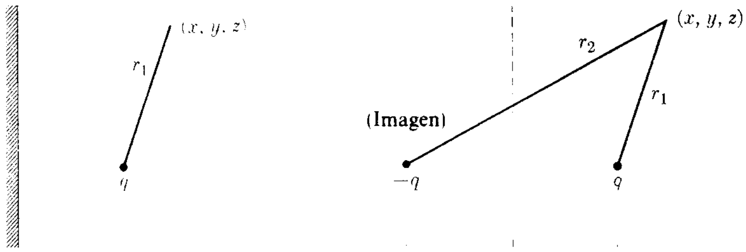
$$\nabla^2 \phi_h = 0$$

$$\frac{1}{4\pi\ \varepsilon_0} \int_{\overline{V}} \frac{\rho_i(\vec{r}\,')}{R}\, dv' = \phi_h \qquad si \quad \vec{r} \in \overline{V}$$

Teoría del potencial en electrostática

El método de las imágenes

Una carga puntual enfrente de un plano conductor a potencial cero



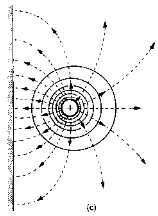
$$\phi(r,z)=\frac{q}{4\pi\ \varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{r^2+(z-d)^2}}-\frac{1}{\sqrt{r^2+(z+d)^2}}\right]$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

Teoría del potencial en electrostática

El método de las imágenes

$$\sigma = -\varepsilon_0 \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{z=0} = -\frac{qd}{2\pi \left(r^2 + d^2\right)^{3/2}}$$

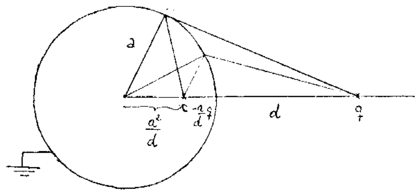


$$G(\vec{r}, \vec{r}\,') = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \right]$$

Teoría del potencial en electrostática

El método de las imágenes

Una carga puntual en presencia de una esfera conductora a potencial cero



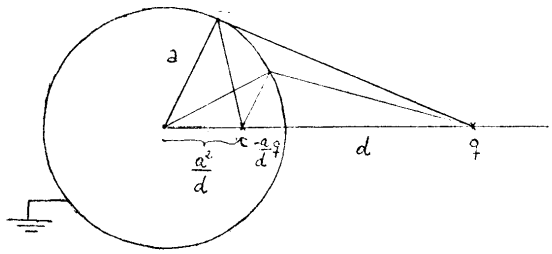
$$\phi(r,z) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\left[\frac{q}{\sqrt{r^2+d^2-2dr\cos\theta}} + \frac{q'}{\sqrt{r^2+d^2-2dr\cos\theta}}\right]$$

$$r = a \qquad \theta = 0 \qquad \theta = \pi \qquad d' = \frac{a^2}{d} \qquad q' = -\frac{aq}{d} \qquad R\,(a, d', \theta) = \frac{a}{d}\,R\,(a, d, \theta)$$

Teoría del potencial en electrostática

El método de las imágenes

Una carga puntual en presencia de una esfera conductora a potencial ϕ_o



Tendremos que añadir una carga puntual en el centro de la esfera

$q_o = 4\pi a\, \varepsilon_o \phi_o$

Si el conductor permanece aislado, con o sin carga, tendremos que añadir una carga puntual en el centro para la conservación de la carga

Teoría del potencial en electrostática

El método de las imágenes.

Una carga puntual situada en un dieléctrico ε_1 que esta en contacto con otro dieléctrico ε_2. La superficie de contacto es plana

$$\phi_1(z=0)=\phi_2(z=0) \qquad \varepsilon_1\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial z}\right)_{z=0}=\varepsilon_2\left(\frac{\partial\phi_2}{\partial z}\right)_{z=0}$$

$$\phi_1(r,z)=\frac{1}{4\pi\ \varepsilon_1}\left[\frac{q}{\sqrt{r^2+(z-d)^2}}-\frac{q_1}{\sqrt{r^2+(z+d)^2}}\right] \qquad r^2=x^2+y^2$$

$$\phi_2(r,z)=\frac{1}{4\pi\ \varepsilon_2}\left[\frac{q_2}{\sqrt{r^2+(z-d)^2}}\right] \qquad q_1=\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}q \qquad q_2=\frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}q$$

Teoría del potencial en electrostática

El método de separación de variables
Coordenadas cartesianas

$$\nabla^2\phi = 0 = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

$$\phi\left(x, y, z\right) = X(x)Y(y)Z(z) \qquad \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = 0$$

$$\frac{X''}{X} = -k_1^2 \;\; ; \frac{Y''}{Y} = -k_2^2 \quad ; \frac{Z''}{Z} = k_3^2 = k_1^2 + k_2^2$$

$$X = A_1 \cos k_1 x + A_2 senk_1 x$$

$$Y = B_1 \cos k_2 y + B_2 senk_2 y$$

$$Z = C_1 chk_3 z + C_2 sh\, k_3 z$$

Teoría del potencial en electrostática

El método de separación de variables
Coordenadas cartesianas

Planteamiento mas general

$$\frac{X''}{X} = -k_1^2 \quad ; \frac{Y''}{Y} = k_2^2 \quad ; \frac{Z''}{Z} = k_3^2 = k_1^2 - k_2^2$$

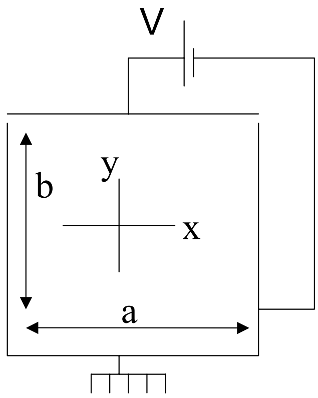
Las constantes de separación han de cumplir $k_1^2 = k_2^{2+} k_3^2$
y serán reales o imaginarias dependiendo de las
condiciones de contorno

$$X = A_1 \cos k_1 x + A_2 sen k_1 x \quad Y = B_1 ch k_2 y + B_2 sh k_2 y \quad Z = C_1 ch k_3 z + C_2 sh\, k_3 z$$

Teoría del potencial en electrostática

El método de separación de variables
Coordenadas cartesianas

Ejemplo: Paralelepipedo con tres lados a potencial cero y uno a potencial V



Hay ceros repetidos en el eje x:
Función trigonométrica

No hay ceros repetidos en el eje y:
Función hiperbólica

$$\phi = \left(A\cos kx + B senkx\right)\left(C chky + D shky\right)$$

Condiciones de contorno

x=0 ϕ=0 $\forall$y $\Rightarrow$ A=0
x=a ϕ=0 $\forall$y $\Rightarrow$ B sen ka F(y)=0 $\Rightarrow$ ka=nπ $\Rightarrow$k= nπ/a
y=0 ϕ=0 $\forall$x $\Rightarrow$ C=0

$$\phi = \left(B\ senkx\right)\left(D\ shky\right) = B'\ senkx\ shky$$

Teoría del potencial en electrostática

El método de separación de variables
Coordenadas cartesianas

y=b ϕ=V $\forall$x $\Rightarrow$V=B' sen kx sh kb
Como k= nπ/a la solución completa será superposición

$$\phi = \sum_1^\infty B_n \; sh\left(\frac{n\pi y}{a}\right) sen\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

$$V = \sum_1^\infty B_n \; sh\left(\frac{n\pi b}{a}\right) sen\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

Multiplicando por sen nπx/a e integrando entre 0 y a...

$$V\int_0^a sen\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx = B_n \; sh\left(\frac{n\pi b}{a}\right) \quad \frac{1}{2} a$$

$$B_n = \frac{2V}{a\; sh\left(n\pi b/a\right)} \int_0^a sen\left(n\pi b/a\right) dx = \frac{2V}{a\; sh\left(n\pi b/a\right)}\left(1-\cos n\pi\right)$$

$$B_n = 0 \qquad si \quad n \quad es \quad par \qquad\qquad B_n = \frac{4V}{a\; sh\left(n\pi b/a\right)} \qquad si \quad n \quad es \quad impar$$

Teoría del potencial en electrostática

El método de separación de variables

Coordenadas cilíndricas

$$\nabla^2\phi = 0 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$$

Simetría axial con invarianza longitudinal (solo depende de r)

$$\nabla^2\phi = 0 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) = 0$$

$$\phi = k_1 \ln r + k_2$$

Teoría del potencial en electrostática

El método de separación de variables

Coordenadas cilíndricas

Invarianza longitudinal (solo depende de r y φ)

$$\nabla^2\phi = 0 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} \qquad \phi = P(r)Q(\varphi)$$

$$r^2\frac{P''}{P} + r\frac{P'}{P} = \frac{Q''}{Q} \qquad r^2\frac{P''}{P} + r\frac{P'}{P} = n^2 \qquad \frac{Q''}{Q} = -n^2$$

$$Q(\varphi) = A_1\cos n\varphi + A_2 sen\, n\varphi \qquad P(r) = C_1 r^n + C_2 r^{-n}$$

$$\phi(r,\varphi) = \sum_1^\infty \left(C_{1n}r^n + C_{2n}r^{-n}\right)\left(A_{1n}\cos n\varphi + A_{2n} sen\, n\varphi\right)$$

$$Si \quad r = 0 \quad esta\ en\ la\ zona \rightarrow C_{2n} = 0$$

$$Si \quad r = 0 \quad no\, esta\ en\ la\ zona \rightarrow C_{1n} = 0$$

Teoría del potencial en electrostática

El método de separación de variables

Coordenadas cilíndricas

Simetria axial (solo depende de r y z)

$$\nabla^2\phi = 0 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \qquad \phi = R(r)Z(z)$$

$$\frac{R''}{R} + \frac{1}{r}\frac{R'}{R} = -\frac{Z''}{Z}$$

Tenemos dos posibilidades

1.- $\frac{Z''}{Z} = T^2 \Rightarrow Z(z) = A_1 chTz + A_2 shTz \qquad haciendo\ Tr = V$

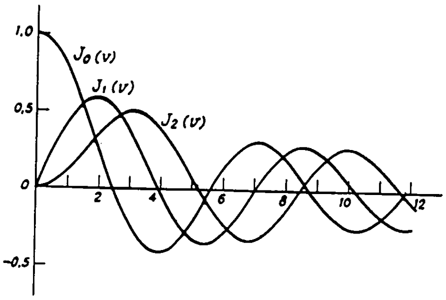
$$\frac{d^2R}{dv^2} + \frac{1}{v}\frac{dR}{dv} + R = 0 \quad Ecuación\ diferencial\ tipo\ Bessel\ con\ n = 0$$

$$R = B_1 J_0(v) + B_2 N_0(v) \qquad Si \quad r = 0 \quad esta\ en\ la\ zona \rightarrow B_2 = 0$$

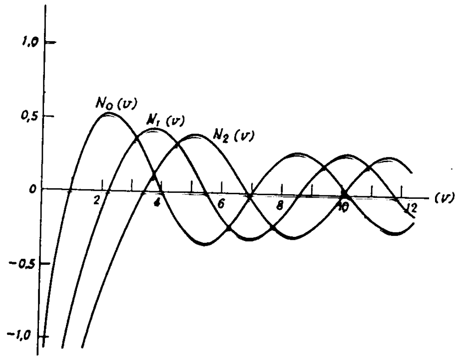
Teoría del potencial en electrostática

El método de separación de variables

Coordenadas cilíndricas



Función de Bessel de 1ª especie



Función de Bessel de 2ª especie

Teoría del potencial en electrostática

El método de separación de variables

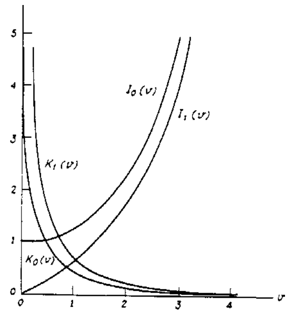
Coordenadas cilíndricas

2.- $$\frac{Z''}{Z} = -T^2 \Rightarrow Z(z) = A_1 \cos Tz + A_2 sen Tz$$

$$R = B_1 J_0(jTr) + B_2 N_0(jTr)$$

$$J_n(jv) = I_n(v) \ \textit{fun. de Bessel} \text{ modificada}$$

$$N_n(jv) = K_n(v) \quad \textit{fun. de Bessel} \text{ mod. de } 2^{\text{a}} \text{ esp.}$$



$$R = B_1 I_0(Tr) + B_2 K_0(Tr)$$

$$Si\ r = 0\ esta\ incluido \Rightarrow B_2 = 0$$

Teoría del potencial en electrostática

El método de separación de variables

Coordenadas cilíndricas

Asimetria total

$$\nabla^2\phi = 0 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \qquad \phi = R(r)F(\varphi)Z(z)$$

$$Z(z) = E_1 chTz + F_1 shTz$$

$$F(\varphi) = C_n \cos(n\varphi) + D_n sen(n\varphi)$$

$$R(r) = A_n\ J_n(Tr) + B_n\ N_n(Tr)$$

Teoría del potencial en electrostática

El método de separación de variables

Coordenadas cilíndricas

Asimetria total(otra posibilidad)

$$\nabla^2\phi = 0 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \qquad \phi = R(r)F(\varphi)Z(z)$$

$$Z(z) = E_1 \cos Tz + F_1 sen Tz$$

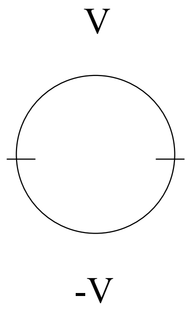
$$F(\varphi) = C_n \cos(n\varphi) + D_n sen(n\varphi)$$

$$R(r) = A_n\ I_n(Tr) + B_n\ K_n(Tr)$$

Teoría del potencial en electrostática

El método de separación de variables

Coordenadas cilíndricas



$$\phi(r,\varphi) = \sum_{1}^{\infty} \left(C_{1n} r^{n} + C_{2n} r^{-n}\right)\left(A_{1n} \cos n\varphi + A_{2n} sen\, n\varphi\right)$$

Condiciones de contorno
El eje dentro $\quad C_{2n}=0$
La funcion no cambia de signo para 0 π y π 2 π.. $A_{1n}=0$

$$\phi(r,\varphi) = \sum_{1}^{\infty} \left(C_{1n} r^{n}\right)\left(A_{2n} sen\, n\varphi\right)$$

$$V = \sum_{1}^{\infty} \left(A_n a^n sen\, n\varphi\right) \quad 0 < \varphi < \pi \qquad -V = \sum_{1}^{\infty} \left(A_n a^n sen\, n\varphi\right) \quad \pi < \varphi < 2\pi$$

Teoría del potencial en electrostática

Coordenadas cilíndricas

El método de separación de variables

Coordenadas cilíndricas

$$\int_0^{2\pi} V \, sen\, n\varphi \; d\varphi = \left(A_n a^n \frac{1}{2} 2\pi \right)$$

$$V \int_0^{\pi} sen\, n\varphi \; d\varphi - V \int_{\pi}^{2\pi} sen\, n\varphi \; d\varphi = \left(A_n a^n \frac{1}{2} 2\pi \right)$$

$$Si\ n\ es\ par \Rightarrow A_n = 0 \qquad Si\ n\ es\ impar \Rightarrow A_n = \frac{4V}{n\pi a^n}$$

Teoría del potencial en electrostática

El método de separación de variables

Coordenadas esféricas

$$\nabla^2\phi = 0 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{1}{sen\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(sen\theta\,\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2 sen\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2}$$

Simetría azimutal $\phi \neq f(\varphi)$

$$\phi = R(r)\Theta(\theta)$$

$$r^2\frac{R''}{R} + 2r\frac{R'}{R} = -\left[\frac{\Theta''}{\Theta} + \frac{1}{tg\theta}\frac{\Theta'}{\Theta}\right] \qquad r^2\frac{R''}{R} + 2r\frac{R'}{R} = n(n+1)$$

$$R(r) = A_1 r^n + A_2 r^{-(n+1)} \qquad \left[\frac{\Theta''}{\Theta} + \frac{1}{tg\theta}\frac{\Theta'}{\Theta}\right] = -n(n+1)$$

Teoría del potencial en electrostática

El método de separación de variables

Coordenadas esféricas

$$\cos\theta = x$$

$$\left(1 - x^2\right)\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2} - 2x\frac{\partial\Theta}{\partial x} + n(n+1)\Theta = 0$$

$$\Theta = C_1 P_n(x) + C_2 Q_n(x)$$

Condiciones de contorno
Si el origen esta en la region de interes A_2=0
Si los puntos θ=0, $\theta=\pi$ estan en la region de estudio C_2 =0
Ya que las funcion Q_n contiene terminos ln(1+x/1-x) (x=cos θ)

Teoría del potencial en electrostática

El método de separación de variables

Coordenadas esféricas

Caso general

$$\phi = R(r)\,\Psi(\varphi)\Theta(\theta)$$

$$\left(r^2 \frac{R''}{R} + 2r\frac{R'}{R} + \frac{\Theta''}{\Theta} + \frac{1}{tg\theta}\frac{\Theta'}{\Theta} \right) sen^2\theta = -\frac{\Psi''}{\Psi}$$

$$\frac{\Psi''}{\Psi} = -m^2 \qquad \Psi(\varphi) = A_1 \cos m\varphi + A_2 sen m\varphi$$

$$r^2 \frac{R''}{R} + 2r\frac{R'}{R} = -n(n+1) \qquad R(r) = B_1 r^n + B_2 r^{-(n+1)}$$

Teoría del potencial en electrostática

El método de separación de variables

Coordenadas esféricas

$$\frac{\Theta''}{\Theta}+\frac{1}{tg\theta}\frac{\Theta'}{\Theta}+\left(n(n+1)-\frac{m^2}{sen^2\theta}\right)=0 \qquad \cos\theta = x$$

$$\Theta''+\frac{1}{tg\theta}\Theta'+\left(n(n+1)-\frac{m^2}{sen^2\theta}\right)\Theta=0 \qquad \Theta = AP_n^m(x)+BQ_n^m(x)$$

$$P_n^m(x)=(1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_n(x)=\frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^n n!}\frac{d^m}{dx^m}(x^2-1)^n$$

Teoría del potencial en electrostática

Calculo del potencial en el interior de una esfera cuya superficie esta a potencial V

Condición de contorno $\phi(r=a)=f(\theta)$
El problema no depende de φ
El punto r=0 esta en la región de interés
Los puntos $\theta=0$ y $\theta=\pi$ están contenidos

$$\phi = Ar^n P^n(\cos\theta)$$

$$\phi(r=a) = f(\theta)$$

$$f(\theta) = Aa^n P_n(\cos\theta)$$

$$\phi = \sum_n A_n r^n P_n(\cos\theta) \qquad f(\theta) = \sum_n A_n a^n P_n(\cos\theta) = \left|C_n = A_n a^n\right| = \sum_n C_n P_n(\cos\theta)$$

$$\int_{-1}^{1} f(\theta) P_n(\cos\theta)\, d(\cos\theta) = \sum_n \int_{-1}^{1} C_n P_n P_m\, d(\cos\theta) = \int_{-1}^{1} C_m P_m^2\, d(\cos\theta) = C_m \frac{2}{2m+1}$$

$$C_m = \frac{2}{2m+1}\int_{-1}^{1} f(\theta) P_n(\cos\theta)\, d(\cos\theta) \qquad \phi = \sum_n \left(\frac{2}{2m+1} \left(\int_{-1}^{1} f(\theta) P_n(\cos\theta)\, d(\cos\theta) \right) \left(\frac{r}{a} \right)^n P_n(\cos\theta) \right)$$

$$f(\theta) = cte \qquad f(\theta) = ksen^2\frac{\theta}{2}$$

Teoría del potencial en electrostática

El método de separación de variables
Coordenadas esféricas

$$\phi(r,\theta,\varphi) = \frac{R(r)}{r}\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$$

$$\frac{d^2R}{dr^2} - \frac{n(n+1)}{r^2}R = 0$$

$$\frac{d}{d\mu}\left(\left(1-\mu^2\right)\frac{d\Theta}{d\mu}\right) + \left(n(n+1) - \frac{m^2}{1-\mu^2}\right)\Theta = 0$$

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + m^2\ \Phi = 0$$

Teoría del potencial en electrostática

El método de separación de variables
Coordenadas esféricas

$$R(r) = A_n r^{n+1} + B_n r^{-n}$$

$$Y_{n,m}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{2n+1(n-m)!}{4(n+m)!}}\, e^{im\varphi} P_n^m(\cos\theta)$$

$$\phi\,(r,\theta,\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\left(A_{n,m} r^n + \frac{B_{n,m}}{r^{n+1}}\right) Y_{n,m}(\theta,\varphi)$$

$$\phi\,(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n r^n + \frac{B_n}{r^{n+1}}\right) P_n(\cos\theta)$$

Teoría del potencial en electrostática

El método de separación de variables
Coordenadas esféricas

$$\phi(z) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \left| z - z' \right|} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 z_>}\left[1 + \frac{z_<}{z_>} + \left(\frac{z_<}{z_>}\right)^2 + \cdots\right]$$

$$\phi\,(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n r^n\right)P_n(\cos\theta) \quad \rightarrow_{\theta=0} \sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n z^n\right) \quad B_n = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} z^{1/n}$$

$$\phi\,(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{B_n}{r^{n+1}}\right)P_n(\cos\theta) \quad \rightarrow_{\theta=0} \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{B_n}{z^{n+1}}\right) \quad A_n = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 z^{1/n+1}}$$

Teoría del potencial en electrostática

El método de separación de variables
Coordenadas esféricas

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r_<^{\,n}}{r_>^{\,n+1}}\right)P_n(\cos\theta)$$

$$\frac{1}{R} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r_<^{\,n}}{r_>^{\,n+1}}\right)P_n(\cos\gamma) \qquad \cos\gamma = \cos\theta\,\cos\theta' + sen\theta\; sen\theta'\cos(\varphi-\varphi')$$

$$P_n(\cos\varphi)\,\frac{4}{2n+1}\sum_{m=-n}^{n} Y_{n,m}(\theta,\varphi)Y_{n,m}^{*}(\theta',\varphi')$$

$$\frac{1}{R} = 4\pi\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{r_<^{\,n}}{r_>^{\,n+1}}\right)Y_{n,m}(\theta,\varphi)Y_{n,m}^{*}(\theta',\varphi')$$