Programa

Lección 18
Circuitos con corrientes que varían lentamente con el tiempo.
La corriente alterna

- 18.1 Introducción
- 18.2 Régimen transitorio
- 18.3 Circuitos en régimen alterno. Régimen estacionario
- 18.4 La potencia en corriente alterna. Potencia activa y potencia reactiva
- 18.5 El fenómeno de la resonancia

Bibliografía

Lección 18

Circuitos con corrientes que varían lentamente con el tiempo.
La corriente alterna

Edminister(Schaum)		
Pomer	Lección	17
Reitz-Milford-Christy	Lección	13
Serrano-García.Gutierrez	Lección	11

Circuitos con corrientes que varían lentamente con el tiempo. La corriente alterna

Introducción

Elementos básicos de una red

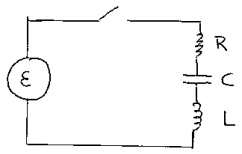
$$v = Ri \qquad i = Gv \qquad i = C\frac{dv}{dt} \qquad v = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(t')\,dt' + v(-\infty)$$

$$f_{em}(t) = -L\frac{di}{dt}$$

Circuitos con corrientes que varían lentamente con el tiempo. La corriente alterna

Régimen transitorio

$$R\,i + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i\,(t')\,dt' + v\left(-\infty\right) = f_{em}(t) - L\frac{di}{dt}$$



$$R\,i + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i\,(t')\,dt' + v\left(-\infty\right) + L\frac{di}{dt} = f_{em}(t)$$

$$v = L\frac{di}{dt}$$

$$i = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t} v\,(t')\,dt' + i\left(-\infty\right)$$

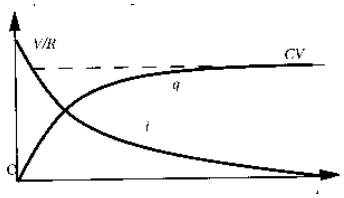
Circuitos con corrientes que varían lentamente con el tiempo. La corriente alterna

Procesos transitorios en bobinas y condensadores

$$R\frac{dq}{dt} + Cq = V \qquad \frac{dq}{dt} + \frac{q}{\tau} = \frac{V}{R}$$

$$q(t) = CV + Ae^{-t/\tau} \qquad i(t) = \frac{V}{R}e^{-t/\tau}$$

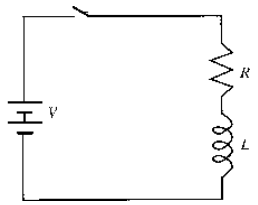
$$q(t) = q_0\, e^{-t/\tau}$$



Circuitos con corrientes que varían lentamente con el tiempo. La corriente alterna

Procesos transitorios en bobinas y condensadores

$$L\frac{di}{dt}+Ri=V \qquad i(t)=\frac{V}{R}+Ae^{-t/\tau}$$



$$i(t)=\frac{V}{R}\left(1-e^{-t/\tau}\right) \qquad i(t)=i_0e^{-t/\tau}$$

Circuitos con corrientes que varían lentamente con el tiempo. La corriente alterna

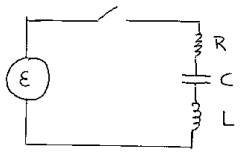
Circuitos en régimen alterno. Régimen estacionario

$$i(t) = i_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$i(t) = \mathrm{Re}\, i_0 e^{j\varphi} e^{i\omega t} \qquad \rightarrow \quad I = i_0 \angle \varphi$$

$$V_C = \frac{I}{jC\omega} \qquad V_L = jL\omega I$$

$$V = \left[R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right] I \qquad V = ZI \qquad I = YV$$



$$Z = R(\omega) + jX(\omega) \qquad V_R = R(\omega) I \qquad V_X = jX(\omega) I$$

Circuitos con corrientes que varían lentamente con el tiempo. La corriente alterna

La potencia en corriente alterna. Potencia activa y potencia reactiva

$$P = \frac{1}{2} v i^* \qquad \left|V_{ef}\right|^2 = \frac{v_0^2}{2}; \qquad \left|I_{ef}\right|^2 = \frac{i_0^2}{2}$$

$$v \rightarrow V_{ef} = \left|V \angle \varphi_1\right|$$

$$i \rightarrow I_{ef} = \left|I \angle \varphi_2\right|$$

$$P = V_{ef} I_{ef}^{\ *}$$

$$\langle P \rangle = \frac{\left|V\right|^2 R(\omega)}{\left|Z\right|^2} = \left|I\right|^2 R(\omega) = \left|V\right| \left|I\right| \cos\varphi$$

Circuitos con corrientes que varían lentamente con el tiempo. La corriente alterna

La potencia en corriente alterna. Potencia activa y potencia reactiva

En términos energéticos, la impedancia...

$$VI^* = \sum_k V_{R_k} I_{R_k}^* + \sum_k V_{L_k} I_{L_k}^* + \sum_k V_{C_k} I_{C_k}^*$$

$$\sum_k V_{R_k} I_{R_k}^* = \sum_k R_k I_{R_k}^* = \langle P(t) \rangle \qquad \sum_k V_{L_k} I_{L_k}^* = j\omega \sum_k L_k I_{L_k}^* = 2j\omega \langle U_m(t) \rangle$$

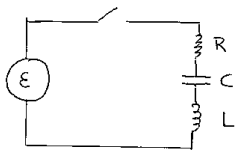
$$\sum_k V_{C_k} I_{C_k}^* = -j\omega \sum_k C_k I_{C_k}^* = -2j\omega \langle U_e(t) \rangle$$

$$Y = \frac{\langle P(t) + 2j\omega \left[\langle U_m(t) \rangle - \langle U_e(t) \rangle \right] \rangle}{|V|^2} \qquad Z = \frac{\langle P(t) + 2j\omega \left[\langle U_m(t) \rangle - \langle U_e(t) \rangle \right] \rangle}{|I|^2}$$

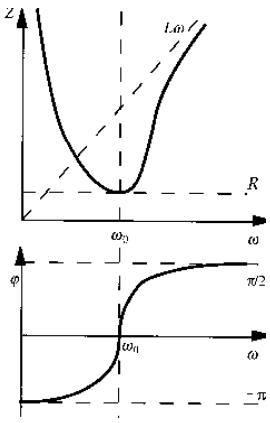
Circuitos con corrientes que varían lentamente con el tiempo. La corriente alterna

El fenómeno de la resonancia

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad Z_0 = R$$



$$Q = \omega_0 \frac{\langle U_{em}(\omega_0)\rangle}{\langle P(t)\rangle}$$



$$\langle U_e \rangle = \langle U_m \rangle \qquad si \quad \omega = \omega_0$$

$$\langle U_{em}(\omega_o)\rangle = 2\langle U_e(\omega_o)\rangle = 2\langle U_m(\omega_o)\rangle$$

$$I = \frac{V}{Z} \qquad V_c = -j\frac{V}{\omega\ CZ}$$

Circuitos con corrientes que varían lentamente con el tiempo. La corriente alterna

El fenómeno de la resonancia

$$\langle U_C \rangle = \frac{|V|^2}{2\omega^2 C |Z|^2} \qquad \langle U_L \rangle = \frac{L|V|^2}{2|Z|^2}$$

$$|Z(\omega)| = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \qquad Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{\omega_0 RC}$$

$$\omega = \omega_0 (1+\delta) \qquad \delta = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \qquad tg\varphi = \frac{2\omega_0 L\delta}{R} = 2Q\delta$$

$$|Z| = \sqrt{1 + (2Q\delta)^2} \qquad \delta = \pm\frac{1}{2Q}$$

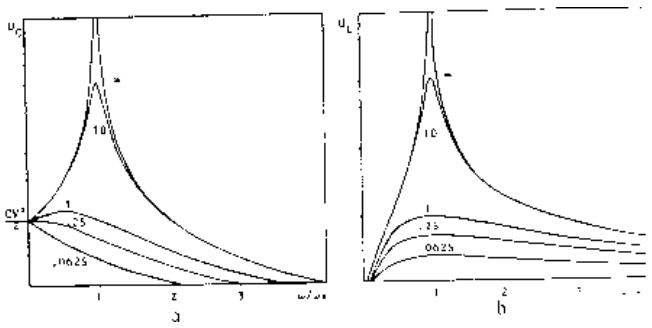
Circuitos con corrientes que varían lentamente con el tiempo. La corriente alterna

El fenómeno de la resonancia

$$P = \frac{|V|^2}{2R}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{P(\omega_0)}{2}$$

$$\omega_{\pm} = \omega_0\left(1 \pm \frac{1}{2Q}\right)$$

$$\Delta\omega = \omega_+ - \omega_- = \frac{\omega_0}{Q}$$



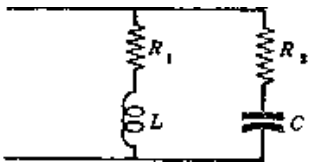
Circuitos con corrientes que varían lentamente con el tiempo. La corriente alterna

El fenómeno de la resonancia

$$Y = \frac{Z_1^*}{|Z_1|^2} + \frac{Z_2^*}{|Z_2|^2}$$

$$Z_1 = R_1 + jL\omega$$

$$Z_2 = R_2 - \frac{j}{C\omega}$$



$$Y = \frac{R_1|Z_2|^2 + R_2|Z_1|^2}{|Z_1|^2|Z_2|^2} + j\frac{|Z_2|^2 - \omega^2 LC|Z_1|^2}{C|Z_1|^2|Z_2|^2}$$

$$|Z_1|^2 = \omega_0^2 LC|Z_2|^2$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{\frac{R_1^2 - L/C}{R_2^2 - L/C}}$$

Circuitos con corrientes que varían lentamente con el tiempo. La corriente alterna

El fenómeno de la resonancia

$$\langle U_L \rangle = \frac{L|V|^2}{2|Z_1|^2} \qquad \langle P \rangle = |V|^2 \operatorname{Re} Y$$

$$Q = \frac{\omega_0 L}{Y_0 |Z_1|^2 (\omega_0)} = \frac{1}{\omega_0 C Y_0 |Z_2|^2 (\omega_0)}$$

$$|Z_1|^2 = \frac{R_1^2 R_2^2 - R_0^2}{R_2^2 - R_0^2} \qquad |Z_2|^2 = \frac{R_1^2 R_2^2 - R_0^2}{R_1^2 - R_0^2}$$

$$Y_0 = \frac{R_1 - R_0}{R_1 R_2 + R_0^2} \qquad \left(\frac{dY}{d\omega}\right)_0 = -j \frac{Q Y_0}{\omega_0} \left[\frac{Z_1^{*2}}{|Z_1|^2} + \frac{Z_2^{*2}}{|Z_2|^2} \right]$$

Circuitos con corrientes que varían lentamente con el tiempo. La corriente alterna

El fenómeno de la resonancia

$$\mathrm{Re}\left(\frac{dY}{d\omega}\right)_0 = -\frac{2QY_0}{\omega_0}\frac{(R_1-R_2)R_0\sqrt{R_1^2R_2^2-R_0^2\left(R_1^2+R_2^2\right)+R_0^4}}{R_1^2R_2^2-R_0^4}$$

$$\mathrm{Im}\left(\frac{dY}{d\omega}\right)_0 = -\frac{2QY_0}{\omega_0}\frac{R_1^2R_2^2-R_0^2\left(R_1^2+R_2^2\right)+R_0^4}{R_1^2R_2^2-R_0^4} \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad Q=\frac{\omega_0 L}{2R}$$

$$Y(\omega_0+\omega_0\delta) = Y_0\left[1-2jQ\delta\,\frac{R^2-R_0^2}{R^2+R_0^2}\right] \qquad \delta = \pm\frac{1}{2Q}\frac{R^2+R_0^2}{R^2-R_0^2}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad Q=\frac{\omega_0 L}{2R} \qquad \delta = \mp\frac{1}{2Q}$$