Programa

Lección 20
Líneas de Transmisión y guías de ondas

- 20.1 Introducción
- 20.2 Concepto de modo. Clasificación de los modos
- 20.3 Líneas de transmisión. Propagación entre dos planos paralelos.
- 20.4 Estudio elemental de una guía rectangular
- 20.5 Parámetros característicos.
- 20.6 Cavidades resonantes.

Bibliografía

Lección 20
Líneas de Transmisión y guías de ondas

Collin	Lección	3
Jackson	Lección	8
Pomer	Lección	18
Reitz-Milford-Christy	Lección	18

Líneas de transmisión y guías de ondas

Concepto de modo. Clasificación de los modos

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu\,\varepsilon\,\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0\, e^{-jwt} \qquad \nabla^2 \vec{E} + \omega^2 \mu\,\varepsilon\,\vec{E} = 0 \qquad \nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \qquad k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}$$

$$\nabla = \nabla_t + \frac{\partial}{\partial z}\vec{u}_z = 0 \qquad E_i(x, y, z) = e_i(x, y) f(z) e^{-jwt} \qquad i = x, y, z$$

$$f(z)\nabla_t^2 e_x + \frac{\partial^2}{\partial z^2} f(z) e_x + k^2 e_x f(z) = 0$$

Líneas de transmisión y guías de ondas

Concepto de modo. Clasificación de los modos

$$\frac{1}{e_x}\nabla_t^2 e_x + \frac{1}{f(z)}\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + k^2 = 0 \qquad \frac{1}{f}\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -k_z^{\,2}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -k_z^{\,2} f} \qquad \boxed{\nabla_t^2 e_x + (k^2 - k_z^2)e_x = 0}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = -k_z^{\,2}\vec{E} \qquad E_x = e_x\, e^{-jwt} e^{jk_z z} \qquad \vec{E} = \vec{e}\, e^{j(k_z z - wt)} \qquad \phi = k_z z - \omega t$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial t}\right|_{\phi} = \frac{\omega}{k_z} = v_f$$

Líneas de transmisión y guías de ondas

Concepto de modo. Clasificación de los modos

$$\nabla = \nabla_t + \frac{\partial}{\partial z}\vec{u}_z$$

$$\vec{E} = \vec{e}e^{ik_z z}e^{-j\omega t} = (\vec{e}_t + \vec{e}_z)e^{ik_z z}e^{-j\omega t}$$

$$\vec{H} = \vec{h}e^{ik_z z}e^{-j\omega t} = (\vec{h}_t + \vec{h}_z)e^{ik_z z}e^{-j\omega t}$$

$$\nabla x\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \nabla x\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Líneas de transmisión y guías de ondas

Concepto de modo. Clasificación de los modos

$$\nabla x\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\left(\nabla_t + jk_z\vec{u}_z\right)x\left(\vec{e}_t + \vec{e}_z\right)e^{jk_z z}e^{-j\omega t} = j\omega\ \mu_0\left(\vec{h}_t + \vec{h}_z\right)e^{jk_z z}e^{-j\omega t}$$

$$\nabla_t x\vec{e}_t + \nabla_t x\vec{e}_z + jk_z\vec{u}_z x\vec{e}_t + jk_z\vec{u}_z x\vec{e}_z = j\omega\ \mu_0\left(\vec{h}_t + \vec{h}_z\right)$$

$$\boxed{\nabla_t x\vec{e}_t = j\omega\ \mu_0\vec{h}_z} \qquad (1)$$

$$\nabla_t x e_z\vec{u}_z + jk_z\vec{u}_z x\vec{e}_t = j\omega\ \mu_0\vec{h}_t$$

$$\boxed{-\vec{u}_z x\nabla_t e_z + jk_z\vec{u}_z x\vec{e}_t = j\omega\ \mu_0\vec{h}_t} \qquad (2)$$

Concepto de modo. Clasificación de los modos

$$\nabla x\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\boxed{\nabla_t x\vec{h}_t = -j\omega\,\varepsilon_0 \vec{e}_z} \quad (3)$$

$$\boxed{-\vec{u}_z x\nabla_t h_z + jk_z\vec{u}_z x\vec{h}_t = -j\omega\,\varepsilon_0 \vec{e}_t} \quad (4)$$

Líneas de transmisión y guías de ondas

Concepto de modo. Clasificación de los modos

Cálculo de e_t

$$-\vec{u}_z x\left(\vec{u}_z x \nabla_t e_z\right)+ jk_z \vec{u}_z x\left(\vec{u}_z x \vec{e}_t\right) = j\omega\,\mu_0 \vec{u}_z x \vec{h}_t$$

$$-\left\{\vec{u}_z\left(\vec{u}_z \nabla_t e_z\right) - \nabla_t e_z\left(\vec{u}_z \vec{u}_z\right)\right\} + jk_z\left\{\vec{u}_z\left(\vec{u}_z \vec{e}_t\right) - \vec{e}_t\left(\vec{u}_z \vec{u}_z\right)\right\} = j\omega\,\mu_0 \frac{1}{jk_z}\left(-j\omega\,\varepsilon_0 \vec{e}_z + \vec{u}_z x \nabla_t h_z\right)$$

$$\nabla_t e_z + jk_z\left(-\vec{e}_t\right) = \frac{\omega\,\mu_0}{k_z}\left(-j\omega\,\varepsilon_0 \vec{e}_z\right) + \frac{\omega\,\mu_0}{k_z}\vec{u}_z x \nabla_t h_z$$

$$\left(-jk_z + \frac{j\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0}{k_z}\right)\vec{e}_t = \frac{\omega\,\mu_0}{k_z}\vec{u}_z x \nabla_t h_z - \nabla_t e_z \qquad \left(-k_z^2 + \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0\right)\vec{e}_t = -j\omega\,\mu_0 \vec{u}_z x \nabla_t h_z + jk_z \nabla_t e_z$$

$$\boxed{\vec{e}_t = \frac{1}{k^2 - k_z^2}\left(-j\omega\,\mu_0 \vec{u}_z x \nabla_t h_z + jk_z \nabla_t e_z\right)} \qquad \boxed{\vec{h}_t = \frac{1}{k^2 - k_z^2}\left(j\omega\,\varepsilon_0 \vec{u}_z x \nabla_t e_z + jk_z \nabla_t h_z\right)}$$

Líneas de transmisión y guías de ondas

Concepto de modo. Clasificación de los modos

Modo TM (o E) $h_z=0 \quad e_z \neq 0$

$$\vec{e}_t = \frac{1}{k^2 - k_z^2}\left(- j\omega\, \mu_0 \vec{u}_z x \nabla_t h_z + jk_z \nabla_t e_z\right) \qquad \vec{e}_t = \frac{1}{k^2 - k_z^2}\left(jk_z \nabla_t e_z\right)$$

$$\vec{h}_t = \frac{1}{k^2 - k_z^2}\left(j\omega\, \varepsilon_0 \vec{u}_z x \nabla_t e_z + jk_z \nabla_t h_z\right)$$

$$\vec{h}_t = \frac{1}{k^2 - k_z^2}\left(j\omega\, \varepsilon_0 \vec{u}_z x \nabla_t e_z\right) = \frac{\omega\, \varepsilon_0}{k_z}\left(\vec{u}_z x \vec{e}_t\right)$$

$$Z^{TM} = \frac{\left|\vec{e}_t\right|}{\left|\vec{h}_t\right|} = \frac{k_0}{\omega \varepsilon_0} = Z_0 \frac{k_z}{k} \qquad Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 377\Omega$$

Líneas de transmisión y guías de ondas

Concepto de modo. Clasificación de los modos

Modo TE (o H) $h_z \neq 0 \quad e_z = 0$

$$\vec{h}_t = \frac{1}{k^2 - k_z^2}\left(j\omega\,\varepsilon_0 \vec{u}_z x \nabla_t e_z + jk_z \nabla_t h_z\right) \qquad \vec{h}_t = \frac{1}{k^2 - k_z^2}\left(jk_z \nabla_t h_z\right)$$

$$\vec{e}_t = \frac{1}{k^2 - k_z^2}\left(-\,j\omega\,\mu_0 \vec{u}_z x \nabla_t h_z + jk_z \nabla_t e_z\right)$$

$$\vec{e}_t = \frac{1}{k^2 - k_z^2}\left(-\,j\omega\,\mu_0 \vec{u}_z x \nabla_t h_z\right) = -\frac{\omega\,\mu_0}{k_z}\left(\vec{u}_z x \vec{h}_t\right)$$

$$Z^{TE} = \frac{\left|\vec{e}_t\right|}{\left|\vec{h}_t\right|} = \frac{\omega\varepsilon_0}{k_z} = Z_0\,\frac{k}{k_z} \qquad Z^{TM} Z^{TE} = Z_0^2$$

Líneas de transmisión y guías de ondas

Concepto de modo. Clasificación de los modos

Modo TEM $h_z = 0 \quad e_z = 0$

$$\vec{h}_t = \frac{1}{k^2 - k_z^2}\left(j\omega\,\varepsilon_0 \vec{u}_z x \nabla_t e_z + jk_z \nabla_t h_z\right) \quad \vec{e}_t = \frac{1}{k^2 - k_z^2}\left(-j\omega\,\mu_0 \vec{u}_z x \nabla_t h_z + jk_z \nabla_t e_z\right)$$

$$\vec{e}_t \neq 0 \quad \vec{h}_t \neq 0 \quad \Rightarrow \quad k^2 - k_z^2 = 0 \quad \Rightarrow k_z = k$$

$$\nabla_t x\, \vec{e}_t = 0 \qquad \vec{e}_t(x,y) = -\nabla_t \phi(x,y) \qquad \nabla_t \vec{e}_t = 0 \qquad \nabla_t^2 \phi(x,y) = 0$$

$$\nabla_t x \vec{h}_t = 0 \qquad \nabla_t \vec{h}_t = 0$$

$$\vec{h}_t = \frac{k}{\omega\,\mu_0}\left(\vec{u}_z x \vec{e}_t\right) \quad \Rightarrow \quad \left|\vec{B}\right| = \frac{\left|\vec{E}\right|}{c} \quad \Rightarrow Z^{TEM} = Z_0$$

Modos híbridos $h_z \neq 0 \quad e_z \neq 0$

Líneas de transmisión y guías de ondas
Líneas de transmisión.

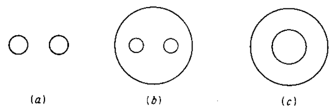


Fig. 3.1 Cross sections of typical transmission lines. (*a*) Two-conductor line; (*b*) shielded two-conductor line; (*c*) coaxial line.

$$\nabla_t^2 \phi\left(x, y\right) = 0$$

$$\vec{e}_t = -\nabla_t \phi = \vec{e}$$

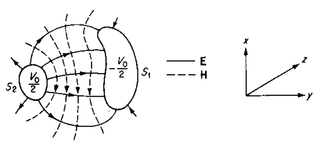


Fig. 3.2 Cross section of a general two-conductor line showing transverse field patterns.

$$\phi = \begin{cases} \dfrac{V_0}{2} & en\ \ S_2 \\ -\dfrac{V_0}{2} & en\ \ S_1 \end{cases} \quad o \begin{cases} V_0 \\ 0 \end{cases} \qquad \vec{h}_t = \frac{k}{\omega\ \mu_0}\left(\vec{u}_z x \vec{e}_t\right)$$

$$\vec{E} = \vec{E}_t = \vec{e}e^{jkz} = -\nabla_t \phi\ \ e^{jkz}$$

$$\vec{H} = \vec{H}_t = \frac{k}{\omega\mu_0}\vec{u}_z x \vec{e}_t e^{jkz}$$

Líneas de transmisión y guías de ondas

Líneas de transmisión.

$$\int_{S_1}^{S_2} \vec{e}_t\, d\vec{l} = -\int_{S_1}^{S_2} \nabla_t \phi d\vec{l} = -\int_{S_1}^{S_2} \frac{d\phi}{dl} d\vec{l} = -[\phi\,(S_2) - \phi\,(S_1)] = -V_0$$

$$V = V_0\, e^{jk\,z}$$

$$\nabla x\vec{H} = j\omega\,\vec{D} + \vec{J} \qquad \vec{n}x\vec{h}_t = \vec{J}_s \qquad \oint_{S_2} \vec{h}_t d\vec{l} = \oint_{S_2} J_s dl = I_0$$

$$\vec{n}x\vec{e}_t = 0$$

$$\nabla_t x\vec{h} = 0 \qquad I = I_0\, e^{jk\,z}$$

Líneas de transmisión y guías de ondas

Líneas de transmisión. Línea coaxial

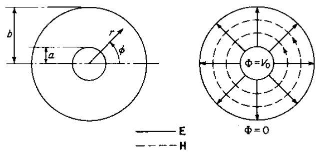


Fig. 3.3 Coaxial transmission line.

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial \varphi^2}=0$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \phi}{\partial r}\right)=0 \qquad \phi = C_1 \ln r + C_2 \qquad \phi = V_0 \quad en\ r=a$$

$$\phi = 0 \quad en\ r=b$$

$$V_0 = C_1 \ln a + C_2 \qquad 0 = C_1 \ln b + C_2 \qquad C_2 = -C_1 \ln b$$

$$C_1 = V_0 \Big/ \left[\ln\left(\frac{a}{b}\right)\right] \qquad \phi = V_0 \frac{\ln\left(r/b\right)}{\ln\left(a/b\right)}$$

Líneas de transmisión y guías de ondas

Líneas de transmisión. Línea coaxial

$$\vec{E} = -\vec{u}_r \frac{\partial\phi}{\partial r} e^{jkz} = -\frac{V_0}{\ln\left(a/b\right)} \frac{\vec{u}_r}{r} e^{jkz} = \frac{V_0}{\ln\left(b/a\right)} \frac{\vec{u}_r}{r} e^{jkz}$$

$$\vec{H} = \frac{k}{\omega\mu_0} \vec{u}_z x \vec{e}_t e^{jkz} = \frac{k}{\omega\mu_0} \frac{V_0}{\ln\left(b/a\right)} \frac{\vec{u}_\varphi}{r} e^{jkz}$$

$$V = V_0\, e^{jk\,z}$$

$$\vec{J}_s = \vec{n} x \vec{H} = \vec{u}_r x \vec{H} = \frac{k}{\omega\mu_0} \frac{V_0}{\ln\left(b/a\right)} \frac{\vec{u}_z}{a} e^{jkz} \qquad I_0 = \frac{k}{\omega\mu_0} \frac{V_0}{a\ln\left(b/a\right)} \int_0^{2\pi} a\, d\varphi = \frac{k}{\omega\mu_0} \frac{V_0 2\pi}{\ln\left(b/a\right)}$$

$$I = I_0\, e^{jk\,z}$$

Líneas de transmisión y guías de ondas

Líneas de transmisión. Línea coaxial

$$P = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\int \vec{E}x\vec{H}^* d\vec{S}_z$$

$$P = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_a^b \int_0^{2\pi} ExH^* \vec{u}_z r dr d\varphi = \frac{1}{2}\frac{k}{\omega\mu_0}\frac{V_0^2}{\left(\ln\left(b/a\right)\right)^2}\int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi\ dr}{r} a\ d\varphi = \frac{k\pi}{\omega\mu_0}\frac{V_0^2}{\ln\left(b/a\right)}$$

$$P = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(VI^*\right) = \frac{1}{2}V_0 I_0 = \frac{1}{2}\frac{k}{\omega\mu_0}\frac{2\pi V_0^2}{\ln\left(b/a\right)}$$

$$Z_0 = \frac{V_0}{I_0}$$

Líneas de transmisión.
Análisis de parámetros distribuidos

$$U_m = \frac{1}{2}\frac{1}{2} I_0 I_0^{*} L_T = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\int_V \vec{B}\vec{H} dv$$

$$L = \frac{\mu_0}{I_0 I_0^{*}} \int_S \vec{H}\vec{H}^{*} dS$$

$$U_e = \frac{1}{4} V_0 V_0^{*} C_T = \frac{1}{4}\int_V \vec{E}\vec{D} dv$$

$$C = \frac{\varepsilon}{V_0 V_0^{*}} \int_S \vec{E}\vec{E}^{*} dS$$

$$\varepsilon = \varepsilon' + \varepsilon''$$

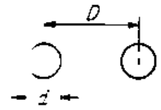
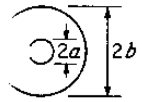
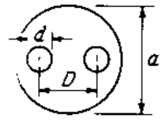
$$R = \frac{R_m}{I_0 I_0^{*}} \oint_{S_1+S_2} \vec{H}\vec{H}^{*} dS$$

$$G = \frac{\omega\varepsilon''}{V_0 V_0^{*}} \int \vec{E}\vec{E}^{*} dS$$

Líneas de transmisión y guías de ondas

Líneas de transmisión.
Análisis de parámetros distribuidos

Table 3.1 Parameters of common transmission lines†

	Z_c	R
	$\frac{1}{\pi}\left(\frac{\mu_0}{\epsilon'}\right)^{\frac{1}{2}}\cosh^{-1}\frac{D}{d}$	$\frac{2R_m}{\pi d}\,\frac{D/d}{[(D/d)^2-1]^{\frac{1}{2}}}$
	$\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\mu_0}{\epsilon'}\right)^{\frac{1}{2}}\ln\frac{b}{a}$	$\frac{R_m}{2\pi}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$
 $p=\frac{D}{d}$ $q=\frac{D}{a}$	$\frac{1}{\pi}\left(\frac{\mu_0}{\epsilon'}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\ln\left(2p\frac{1-q^2}{1+q^2}\right)-\frac{1+4p^2}{16p^4}(1-4q^2)\right]$	$\frac{2R_m}{\pi d}\left[1+\frac{1+2p^2}{4p^4}(1-4q^2)\right]+\frac{8R_m}{\pi a}q^2\left[(1+q^2)-\frac{1+4p^2}{8p^4}\right]$

Líneas de transmisión y guías de ondas

Líneas de transmisión.
Análisis de parámetros distribuidos

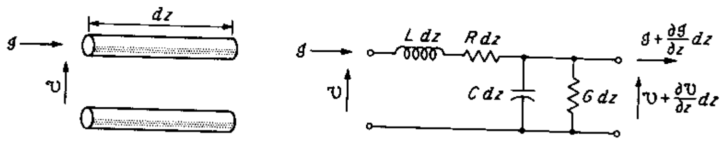


Fig. 3.4 **Equivalent circuit of a differential length of transmission line.**

$$v-\left(v+\frac{\partial v}{\partial z}dz\right)=iRdz+Ldz\frac{\partial i}{\partial t}\qquad\qquad \frac{\partial v}{\partial z}=-iR-L\frac{\partial i}{\partial t}$$

$$i-\left(i+\frac{\partial i}{\partial z}dz\right)=vGdz+Cdz\frac{\partial v}{\partial t}\qquad\qquad \frac{\partial i}{\partial z}=-vG-C\frac{\partial v}{\partial t}$$

Líneas de transmisión y guías de ondas

Líneas de transmisión. Análisis de parámetros distribuidos

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = -R\frac{\partial i}{\partial z} - L\frac{\partial^2 i}{\partial t \partial z} \qquad \frac{\partial^2 i}{\partial t \partial z} = -G\frac{\partial v}{\partial z} - C\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = R\left(Gv + C\frac{\partial v}{\partial t}\right) + L\left(G\frac{\partial v}{\partial t} + C\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - (LG + RC)\frac{\partial v}{\partial t} - LC\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - RGv = 0$$

$$v = \mathrm{Re}\left(Ve^{j(\gamma z - jwt)}\right) \qquad -\gamma^2 + jw\left(LG + RC\right) + w^2 LC - RG = 0$$

Líneas de transmisión y guías de ondas

Líneas de transmisión.
Análisis de parámetros distribuidos

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -(R - jwL)I \qquad \frac{\partial I}{\partial z} = -(G - jwC)V$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - (RG + w^2 LC)V + jw\left(RC + LG\right)V = 0$$

$$V = V^+ e^{j\gamma\, z} + V^- e^{-j\gamma\, z} \qquad \gamma = \left[(-RG + w^2 LC) + jw\left(RC + LG\right)\right]^{1/2}$$

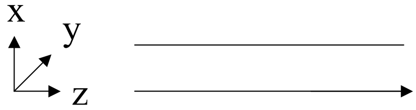
$$V = I^+ e^{j\gamma\, z} - I^- e^{-j\gamma\, z} = \frac{\gamma}{R - jwL}\left(V^+ e^{j\gamma\, z} - V^- e^{-j\gamma\, z}\right) \qquad Z_c = \frac{R - jwL}{\gamma} = \left(\frac{R - jwL}{G - jwC}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\gamma = \left|\begin{matrix} R = 0 \\ G = 0 \end{matrix}\right| \left[(-RG - w^2 LC) - jw\left(RC + LG\right)\right]^{1/2} = w\sqrt{LC} \qquad Z_c = \sqrt{\frac{L}{C}} = \left|LC = \varepsilon\mu\right| = \frac{\varepsilon}{C}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

Líneas de transmisión y guías de ondas

Propagación entre dos planos paralelos

$$\vec{E}(x,z,t)\ ;\ \vec{H}(x,z,t)$$



¿Habrá solución TEM?

$$E_x = cte \qquad \vec{e}_x = e_0\vec{u}_x \qquad \phi_2 - \phi_1 = e_0 a$$

$$\vec{h}_y = \frac{e_0}{\mu_0 c}\vec{u}_y$$

$$\vec{E} = e_0 e^{ikz} e^{-jwt}\vec{u}_x \qquad \vec{H} = \frac{e_0}{\mu_0 c} e^{ikz} e^{-jwt}\vec{u}_y \qquad v_f = \frac{w}{k} = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0\mu_o}}$$

$$\vec{N} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\vec{E}x\vec{H}^*\right) = \frac{1}{2}\frac{e_0^2}{\mu_0 c} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}e_0^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{Z_0}e_0^2 = \frac{1}{2}Z_0 h_0^2$$

Líneas de transmisión y guías de ondas

Propagación entre dos planos paralelos

Solución TM

$$e_z \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \nabla_t^2 e_z + \left(k^2 - k_z^2\right) e_z = 0$$

$$e_z(x) \Rightarrow \frac{\partial^2 e_z}{\partial x^2} = -\left(k^2 - k_z^2\right) e_z = -k_x^2 e_z \qquad e_z = A\cos k_x x + B senk_x x$$

$$x = 0 \Rightarrow e_z = 0 \Rightarrow A = 0 \qquad x = a \Rightarrow e_z = 0 \Rightarrow B senk_x a = 0 \Rightarrow k_x a = n\pi$$

$$k_x = \frac{n\pi}{a} \Rightarrow k_{z_n} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2} \qquad k_{z_n} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}$$

Líneas de transmisión y guías de ondas

Propagación entre dos planos paralelos

$$e_z = B sen \frac{n\pi\, x}{a} \qquad e_x = j\frac{k_z}{k_x} B \cos\frac{n\pi\, x}{a}$$

$$h_y = \frac{1}{Z^{TM}} e_x = j\frac{1}{Z_0}\frac{k}{k_x} B \cos\frac{n\pi\, x}{a} \qquad v_f = \frac{w}{k_{z_n}} = \frac{w}{\sqrt{k^2 - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}}$$

$$N_z = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\vec{e}_t x \vec{h}_t^*\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{Z^{TM}}\left|e_x\right|^2 = \frac{1}{2} Z^{TM}\left|h_y\right|^2 = \frac{1}{2}\left|e_x\right|\left|h_y\right| = \frac{1}{2}\frac{1}{Z_0}\frac{kk_z}{k_x^2} B^2 \cos^2\frac{n\pi x}{a}$$

$$P_z = \int_{\substack{x=0\\y=0}}^{\substack{y=b\\x=a}} N_z dS = b\frac{1}{2}\frac{1}{Z_0}\frac{kk_z}{k_x^2} B^2 \frac{a}{2} = \frac{1}{4}\frac{1}{Z_0}\frac{kk_z}{k_x^2} B^2 ab$$

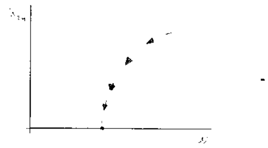
Líneas de transmisión y guías de ondas

Propagación entre dos planos paralelos

$$k_{z_n} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2} = \sqrt{\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}$$

Frecuencia de corte

$$k_{z_n} = 0 \qquad \omega_{c_n} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \frac{n\pi}{a} = c\,\frac{n\pi}{a}$$



Si $\omega < \omega_{c_1}$ *no existe ningun modo TM*

Propagación entre dos planos paralelos

Solución TE $\quad h_z \neq 0 \quad \nabla_t^2 h_z + \left(k^2 - k_z^2\right) h_z = \nabla_t^2 h_z + k_x^2 h_z = 0$

$$h_z = A\cos k_x x + B sen k_x x$$

$$h_x = \frac{jk_z}{k_x^2} k_x \left(-A sen k_x x + B\cos k_x x\right) \qquad e_y = -\frac{\omega\mu_0}{k_z}\frac{jk_z}{k_x^2} k_x \left(-A sen k_x x + B\cos k_x x\right)$$

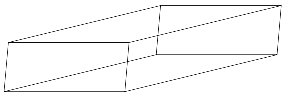
$$x = 0 \Rightarrow e_y = 0 \Rightarrow B = 0 \qquad x = a \Rightarrow e_y = 0 \Rightarrow k_x a = n\pi \Rightarrow k_{x_n} = \frac{n\pi}{a}$$

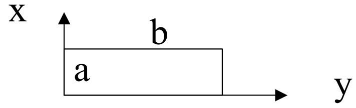
$$\boxed{h_z = A\cos\frac{n\pi x}{a}} \qquad h_x = \frac{jk_z}{k_x^2} k_x \left(-A sen\frac{n\pi x}{a}\right)$$

$$e_y = -\frac{\omega\mu_0}{k_z}\frac{jk_z}{k_x^2} k_x \left(-A sen\frac{n\pi x}{a}\right) \qquad k_x = \frac{n\pi}{a} \Rightarrow k_{z_n} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}$$

Líneas de transmisión y guías de ondas

Guía de sección rectangular





$$\vec{E} = \vec{e}(x,y)e^{j(k_z z - wt)} \qquad \vec{H} = \vec{h}(x,y)e^{j(k_z z - wt)}$$

$$\nabla_t^2 \vec{e} + \left(k^2 - k_z^2\right)\vec{e} = 0 \qquad \nabla_t^2 \vec{h} + \left(k^2 - k_z^2\right)\vec{h} = 0$$

$$x = 0,\ x = a : E_y = 0,\ E_z = 0 \qquad y = 0,\ y = b : E_x = 0,\ E_z = 0$$

$$TEM \quad E_z = 0 \quad y \quad H_z = 0 \qquad TE \quad E_z = 0 \quad y \quad H_z \neq 0$$

$$TM \quad E_z \neq 0 \quad y \quad H_z = 0 \qquad hibridos \quad E_z \neq 0 \quad y \quad H_z \neq 0$$

Guía de sección rectangular

Solución TM

$$\nabla^2{}_t = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\vec{u}_x + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\vec{u}_y \qquad e_z = f(x)\,g(y) \qquad \frac{1}{f}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{1}{g}\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \left(k^2 - k_z^2\right) = 0$$

$$\boxed{k^2 - k_x^2 - k_y^2 - k_z^2 = 0} \qquad f(x) = A sen k_x x + B\cos k_x x \qquad g(y) = C sen k_y y + D\cos k_y y$$

$$e_z = 0 \quad para \quad x = 0,\ y = 0 \quad \Longrightarrow \quad B = D = 0 \qquad f(x) = A sen k_x x \qquad g(y) = C sen k_y y$$

$$e_z = A sen k_x x\, sen k_y y \qquad e_z = 0 \quad para \quad x = a,\ y = b \qquad sen k_x a = 0 \Rightarrow k_x a = m\pi \qquad sen k_y b = 0 \Rightarrow k_y b = n\pi$$

$$k_z = \sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \qquad E_z = e_z e^{j(k_z z - wt)} = A sen\frac{m\pi}{a}x\ sen\frac{n\pi}{b}y\ e^{j(k_z z - wt)}$$

Líneas de transmisión y guías de ondas

Guía de sección rectangular

$$e_x = \frac{jk_z}{k^2 - k_z^2}\frac{m\pi}{a} A\cos\frac{m\pi}{a}x\, sen\frac{n\pi}{b}y$$

$$e_y = \frac{jk_z}{k^2 - k_z^2}\frac{n\pi}{b} A\, sen\frac{m\pi}{a}x\cos\frac{n\pi}{b}y$$

$$h_x = \frac{-j\omega\,\varepsilon_0}{k^2 - k_z^2}\frac{n\pi}{b} A\, sen\frac{m\pi}{a}x\cos\frac{n\pi}{b}y$$

$$h_x = \frac{j\omega\,\varepsilon_0}{k^2 - k_z^2}\frac{m\pi}{a} A\cos\frac{m\pi}{a}x\, sen\frac{n\pi}{b}y$$

Guía de sección rectangular

Solución TE $h_z = \left(A\, senk_x x + B\cos k_x x\right)\left(C\, senk_y y + D\cos k_y y\right)$

$$\vec{h}_t = \frac{1}{k^2 - k_z^2}\left(jk_z \nabla_t h_z\right)$$

$$h_x = \frac{jk_z}{k^2 - k_z^2} k_x \left(A\cos k_x x - Bsenk_x x\right)\left(C\, senk_y y + D\cos k_y y\right)$$

$$h_y = \frac{jk_z}{k^2 - k_z^2} k_y \left(A\, senk_x x + B\cos k_x x\right)\left(C\cos k_y y - Dsenk_y y\right)$$

$h_x = 0 \quad para \quad x = 0 \Rightarrow A = 0$ $\qquad$ $h_y = 0 \quad para \quad y = 0 \Rightarrow C = 0$

$$h_z = \left(B\cos k_x x\right)\left(D\cos k_y y\right) = B\cos k_x x \cos k_y y$$

Guía de sección rectangular

$$h_x = \frac{-jk_z}{k^2 - k_z^2} k_x B sen k_x x \cos k_y y \qquad h_y = \frac{-jk_z}{k^2 - k_z^2} k_y B \cos k_x x sen k_y y$$

$$h_x = 0 \quad para \quad x = a \Rightarrow k_x = \frac{m\pi}{a} \qquad h_y = 0 \quad para \quad y = b \Rightarrow k_y = \frac{n\pi}{b}$$

$$k_z = \sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \qquad e_x = \frac{-j\omega\ \mu_0}{k^2 - k_z^2} k_y B \cos k_x x\ sen k_y y$$

$$e_y = \frac{j\omega\ \mu_0}{k^2 - k_z^2} k_x B sen k_x x \cos k_y y \qquad Z = \frac{\left|\vec{e}_t\right|}{\left|\vec{h}_t\right|} \qquad Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 377\Omega$$

$$Z^{TM} = \frac{k_z}{\omega\varepsilon_0} = Z_0 \frac{k_z}{k} \qquad Z^{TE} = \frac{\omega\mu_0}{k_z} = Z_0 \frac{k}{k_z}$$

Líneas de transmisión y guías de ondas

Parámetros característicos de una guía

k_z=0 corte del modo

w de corte par el modo TM_{nm}

$$0 = k^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$

$$k^2 = w^2 \varepsilon\ \mu$$

$$w_c = \sqrt{1/\varepsilon\ \mu}\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

Las frecuencias mas pequeñas entre los TM_{nm} corresponden a n=m=1 (b>a)

Las frecuencias mas pequeñas entre los TE_{nm} corresponden a m=0 y n=1 si b>a el TE_{10} sera el fundamental

Parámetros característicos de una guía

Velocidad de fase
$$v_f = \frac{w}{k_z} = \frac{w}{\sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}} = \frac{\lambda_g}{T}$$

Longitud de onda de la guía λ_g
$$k_z = \frac{2\pi}{\lambda_g}$$

$$k^2 = w^2 \varepsilon_0 \mu_0 = \frac{w^2}{c^2} \qquad v_f > c$$

$$v_f = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{c^2}{w^2}\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]}}$$

Líneas de transmisión y guías de ondas

Parámetros característicos de una guía

$$v_g = \frac{\partial w}{\partial k_z} = \cdots = \frac{c^2}{v_f} < c$$

Impedancias

Transporte de energía $\quad \mathrm{Re}(\widehat{P}) = \mathrm{Re}\frac{1}{2}\int_{Seccion} \vec{E}x\vec{H}^{*}d\vec{S}$

$$\vec{E}x\vec{H}^{*}d\vec{S} = \vec{e}_t x\vec{h}_t^{*}dS\,\vec{u}_z$$

Parámetros característicos de una guía

Caso TM

$$\vec{E}x\vec{H}^* d\vec{S} = \vec{e}_t x \vec{h}_t^* dS\, \vec{u}_z = \frac{w\varepsilon_0}{k_z} \vec{e}_t x(\vec{u}_z x \vec{e}_t) dS\, \vec{u}_z =$$

$$\frac{w\varepsilon_0}{k_z} \vec{e}_t x(\vec{u}_z x \vec{e}_t) dS\, \vec{u}_z = \frac{w\varepsilon_0}{k_z} \left[\vec{u}_z \left(\vec{e}_t \vec{e}_t^*\right) - \vec{e}_t^* \left(\vec{u}_z \vec{e}_t\right)\right] dS\, \vec{u}_z = \frac{w\varepsilon_0}{k_z} \left|\vec{e}_t\right|^2 dS$$

$$P = \frac{w\varepsilon_0}{2k_z} \int_{Seccion} \left|\vec{e}_t\right|^2 dS = \frac{1}{2} \int_{Seccion} \left|\vec{h}_t\right| \left|\vec{e}_t\right| dS$$

Parámetros característicos de una guía

Caso TE

$$P = \frac{w\varepsilon_0}{2k_z} \int_{Seccion} \left|\vec{h}_t\right|^2 dS = \frac{1}{2} \int_{Seccion} \left|\vec{h}_t\right|\left|\vec{e}_t\right| dS$$

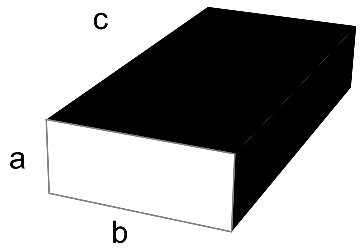
Energía almacenada

$$\left\langle u_E \right\rangle_L = \frac{1}{4}\int_V \vec{E}\vec{D}^* dV = \frac{1}{4}\varepsilon_0 \int_V \left|\vec{E}\right|^2 dV = \frac{1}{4}\varepsilon_0 \int_V \left(\left|\vec{e}_t\right|^2 + \left|\vec{e}_z\right|^2\right) dV =$$

$$= \left|dV = LdS\right| = L\frac{1}{4}\varepsilon_0 \int_V \left(\left|\vec{e}_t\right|^2 + \left|\vec{e}_z\right|^2\right) dS$$

Cavidades resonantes

Cavidades resonantes



Caja paralelepípeda metálica

$$\vec{e}_t = 0$$

$$c = p\frac{2\pi}{k_z^2} \qquad k_z = \frac{p\pi}{c}$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -k_z^2 Z \qquad Z = A sen k_z z + B\cos k_z z$$

Líneas de transmisión y guías de ondas

Cavidades resonantes

Caso TE nos quedamos
con $\operatorname{sen} k_z z$ para que h_z se anule en z=0 y z=c

$$h_z = A\cos\frac{m\pi\ x}{a}\cos\frac{n\pi\ y}{b}\,sen\frac{p\pi\ z}{c}$$

n o m pueden ser cero (uno de ellos) p $\neq 0$

Caso TM nos quedamos
con $\cos k_z z$ para que se anule la componente transversal.
Ni n ni m pueden ser cero, p si que puede ser cero

$$e_z = A\,sen\frac{m\pi\ x}{a}\,sen\frac{n\pi\ y}{b}\cos\frac{p\pi\ z}{c}$$

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2$$

$$\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{c}\right)^2$$