# Programa

Lección 4
Desarrollo multipolar del potencial escalar. Las fuentes puntuales del campo electrostático

# Programa

Lección 4
Desarrollo multipolar del potencial escalar. Las fuentes puntuales del campo electrostático

BIBLIOGRAFÍA

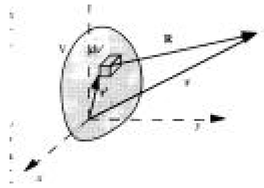
| | | |
|---|---|---|
| Griffiths | Lección | 3 |
| Pomer | Lección | 4 |
| Reitz –Milford-Christy | Lección | 2 |
| Wangsness | Lección | 8 |

## Desarrollo multipolar del potencial escalar. Las fuentes puntuales del campo electrostático

### Desarrollo multipolar del potencial escalar de una distribución de carga

$$\boxed{\phi(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec r\,')}{R}\,dv'}$$

$$\vec r >> \vec r\,'$$



$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} + x_i'\partial_i\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{x_i' x_j'}{2!}\partial_i\,\partial_j\left(\frac{1}{r}\right) + \cdots \qquad \frac{1}{R} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos\theta)$$

$$\boxed{\phi(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{r^{n+1}}\right)\int_V r'^{\,n} P_n(\cos\theta)\,\rho(\vec r\,')\,dv'}$$

## Desarrollo multipolar del potencial escalar. Las fuentes puntuales del campo electrostático

### Momentos multipolares

Termino monopolar (n=0) $\varphi_0 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ $q = \int_{v'} \rho\,(\vec{r})\,dv'$

Termino dipolar (n=1) $\varphi_1 = \dfrac{\vec{p}\,\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$ $p_i = \int_{v'} x_i'\ \rho\,(\vec{r})\,dv'$

Sistema de referencia para el momento dipolar

$$\vec{p} = \int_{v'} \vec{r}\ \rho\,(\vec{r})\,dv' = \int_{v'} \left(\vec{r}\,' + \overline{OO'}\right) \rho\,(\vec{r}\,')\,dv' = \vec{p}\,' + q\overline{OO'}$$

# Desarrollo multipolar del potencial escalar. Las fuentes puntuales del campo electrostático

## Términos de orden superior al dipolar

Término cuadrupolar
$$Q_{i,j} = \frac{1}{2!}\int_V x'_i x'_j \, \rho \, (\vec{r}\,')\, dv'$$

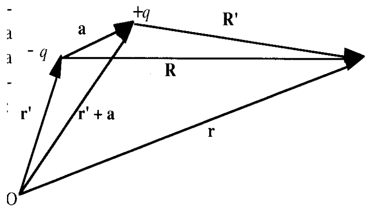
$$\phi_2 = \frac{x_i \; x_j}{8\pi\varepsilon_0 r^5}\int_V \rho\,(\vec{r})\left(3x'_i \; x'_j - r'^2\delta_{i,j}\right)dv'$$

Términos de orden superior
$$Q_{i_1,i_2\cdots i_n} = \frac{1}{n!}\int_V x'_{i_1} \; x'_{i_2} \cdots x'_{i_n} \; \rho \; (\vec{r}\,')\, dv'$$

## Desarrollo multipolar del potencial escalar. Las fuentes puntuales del campo electrostático

### Potencial y campo creados por un dipolo eléctrico

$$f = \frac{q}{4pe_0}\left(\frac{1}{R'} - \frac{1}{R}\right)$$




$$f = \frac{\vec{p}\ \vec{R}}{4pe_0 R^3}$$

$$f = -\frac{\vec{p}}{4pe_0}\nabla\left(\frac{1}{R}\right) = \frac{\vec{p}}{4pe_0}\nabla'\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{1}{4pe_0}\nabla\left(\frac{\vec{p}}{R}\right)$$

$$\vec{E} = -\nabla f = -\frac{1}{4pe_0}\nabla\left(\frac{\vec{p}\ \vec{R}}{R^3}\right)$$

$$\vec{E} = \frac{3(\vec{p}\vec{R})\vec{R} - R^2\,\vec{p}}{4pe_0 R^5}$$

# Desarrollo multipolar del potencial escalar. Las fuentes puntuales del campo electrostático

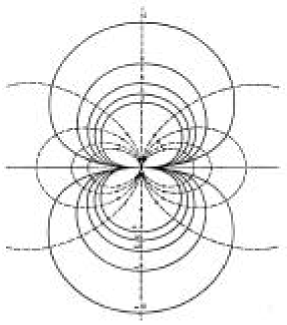
## Potencial y campo creados por un dipolo eléctrico

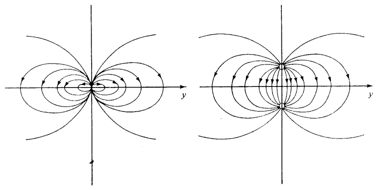
$$\vec{E} = \frac{3(\vec{p}\vec{R})\vec{R} - R^2\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 R^5} - \frac{1}{3\varepsilon_0}\vec{p}\delta(\vec{R}) \qquad \phi = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$E_r = \frac{p\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$E_\theta = \frac{p\,sen\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$E_\varphi = 0$$





(a) Field of a "pure" dipole (b) Field of a "physical" dipole

## Desarrollo multipolar del potencial escalar. Las fuentes puntuales del campo electrostático

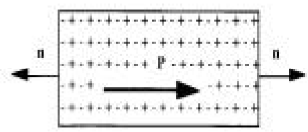
### Distribuciones de dipolos

$$\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dv} \qquad f(\vec{r}) = \frac{1}{4pe_0}\int_{v'} \frac{\vec{P}(\vec{r}\,')\,\vec{R}}{R^3}\,dv' \qquad \frac{\vec{R}}{R^3} = \nabla'\left(\frac{1}{R}\right)$$

$$f(\vec{r}) = \frac{1}{4pe_0}\int_{s'} \frac{\vec{P}(\vec{r}\,')\,d\vec{S}}{R} - \frac{1}{4pe_0}\int_{v'} \frac{\nabla\vec{P}(\vec{r}\,')}{R}\,dv'$$

$$\boxed{r_p = -\nabla\vec{P}}$$

$$\boxed{s_p = \vec{P}\,\vec{n}}$$



$$\vec{P} = cte \qquad r_p = -\nabla\vec{P} = 0 \qquad s_p = \vec{P}\,\vec{n} = \pm P$$