Programa

Lección 5
Desarrollo multipolar del potencial vector-. Las fuentes puntuales del campo magnetostático

- 5.1 Introducción
- 5.2 Desarrollo multipolar del potencial vector correspondiente a una distribución de corrientes
- 5.3 Multipolos magnéticos
- 5.4 El dipolo magnético puntual. Introducción del potencial escalar en magnetostática
- 5.5 Distribuciones de dipolos

Programa

Lección 5

Desarrollo multipolar del potencial vector-. Las fuentes puntuales del campo magnetostático

BIBLIOGRAFÍA

Griffiths	Lección	5
Jackson	Lección	5
Pomer	Lección	5
Wangness	Lección	20

Desarrollo multipolar del potencial vector. Las fuentes puntuales del campo magnetostático.

Desarrollo multipolar del potencial vector correspondiente a una distribución de corrientes

$$\vec{A} = \frac{m_0}{4p} \int_{v'} \frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{R}\, dv' \qquad\qquad \vec{A} = \frac{m_0\, i}{4p} \int_{S'} d\vec{S}\,' \, x \, \frac{\vec{R}}{R^3}$$

$$\vec{A} = \frac{m_0\, i}{4p} \int_{s'} d\vec{S}\,' \, x \left(\frac{\vec{r}}{r^3} + \cdots \right) = \left(\frac{m_0\, i}{4p} \int_{s'} d\vec{S}\,' \right) x \, \frac{\vec{r}}{r^3} + \cdots$$

Otra posibilidad $\quad \vec{A} = \dfrac{m_0 i}{4p} \oint \dfrac{1}{R}\, d\vec{l} \qquad \dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{r'}{r} \right)^n P_n\left(\cos q\right)$

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{m_0 i}{4p} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{r^{n+1}} \right) \oint r'^{\,n} P_n\left(\cos q\right) d\vec{l}}$$

Desarrollo multipolar del potencial vector.
Las fuentes puntuales del campo magnetostático

Multipolos magnéticos

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\left(\frac{1}{r}\oint d\vec{l} + \frac{1}{r^2}\oint r'\cos\theta \; d\vec{l} + \frac{1}{r^3}\oint r'^2\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)d\vec{l} + \cdots\right)$$

Termino monopolar

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\left(\frac{1}{r}\oint d\vec{l}\right) = 0$$

Término dipolar

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\left(\frac{1}{r^2}\oint r'\cos\theta \; d\vec{l}\right) = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\left(\frac{1}{r^3}\oint (\vec{r}\;\vec{r}\,')\, d\vec{l}\right)$$

Desarrollo multipolar del potencial vector. Las fuentes puntuales del campo magnetostático.

Multipolos magnéticos

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\left(\frac{1}{r^2}\oint r'\cos\theta\, d\vec{l}\right) = \frac{\mu_0 i}{4\pi}\left(\frac{1}{r^3}\oint(\vec{r}\,\vec{r}')\,d\vec{l}\right)}$$

$$d\vec{l} = d\vec{r}'$$

$$(\vec{r}\,\vec{r}')d\vec{r}'$$

$$d\left[(\vec{r}\,\vec{r}')\vec{r}'\right] = (\vec{r}\,d\vec{r}')\vec{r}' + (\vec{r}\,\vec{r}')d\vec{r}' \qquad \oint d\left[(\vec{r}\,\vec{r}')\vec{r}'\right] = 0 \qquad \boxed{\oint(\vec{r}\,d\vec{r}')\vec{r}' = -\oint(\vec{r}\,\vec{r}')d\vec{r}'}$$

$$\vec{r}\times\oint(\vec{r}\times d\vec{r}') = \oint \vec{r}'(\vec{r}\,d\vec{r}') - d\vec{r}'(\vec{r}\,\vec{r}') = -2\oint(\vec{r}\,\vec{r}')d\vec{r}'$$

$$\oint(\vec{r}\,\vec{r}')d\vec{l} = -\frac{1}{2}\vec{r}\times\oint\left(\vec{r}'\times d\vec{l}\right) \qquad \boxed{\vec{A} = \frac{\mu_0 i}{4\pi\, r^3}\left[-\frac{1}{2}\vec{r}\times\oint\left(\vec{r}'\times d\vec{l}\right)\right]}$$

Desarrollo multipolar del potencial vector.
Las fuentes puntuales del campo magnetostático.

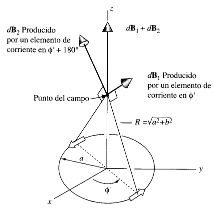
Multipolos magnéticos

$$\vec{m} = \frac{i}{2}\oint\left(\vec{r}'\, x d\vec{l}\right)$$

Momento dipolar magnético

$$\boxed{\vec{A} = \frac{m_0}{4p\; r^3}\left[\vec{m}\; x\vec{r}\;\right]}$$

Si la espira es plana



$$d\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{r} x d\vec{l}$$

$$\vec{m} = i\int_{S'} d\vec{S}'$$

$$\vec{m} = i\;\vec{S}$$

Generalización para una distribución de corrientes

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\int_{V'}\vec{r}' x\,\vec{J}(\vec{r}')\,dv'$$

Desarrollo multipolar del potencial vector. Las fuentes puntuales del campo magnetostático.

¿Depende del origen?

$$\vec{m}' = \frac{i}{2}\oint\left(\vec{r}'' \, x d\vec{l}\right) = \frac{i}{2}\oint\left(\vec{a} \, x d\vec{l}\right) + \frac{i}{2}\oint\left(\vec{r}' \, x d\vec{l}\right) = \frac{i}{2}\vec{a} \, x \oint d\vec{l} + \vec{m} = \vec{m}$$

Desarrollo multipolar del potencial vector.
Las fuentes puntuales del campo magnetostático.

El dipolo magnético puntual. Introducción del potencial escalar en magnetostática

$$\vec{A} = \lim_{\dim\to 0} \frac{m_0 i}{4p} \int d\vec{S}' \, x \, \frac{\vec{R}}{R^3} = \frac{m_0 \, \vec{m} \, x \, \vec{r}}{4p \, r^3} \qquad \vec{A} = \frac{m_0 \, \vec{m} \, x \, \vec{R}}{4p \, R^3}$$

$$\nabla x \left(\frac{\vec{m} \, x \, \vec{R}}{R^3} \right) = \vec{m} \left[\nabla \left(\frac{\vec{R}}{R^3} \right) \right] - (\vec{m}\nabla) \left(\frac{\vec{R}}{R^3} \right) \qquad -(\vec{m}\nabla) \left(\frac{\vec{R}}{R^3} \right) = \frac{3(\vec{m}\vec{R})\vec{R} - R^2 \, \vec{m}}{R^5} - \frac{4p}{3} \vec{m} d(\vec{R})$$

$$\nabla \left(\frac{\vec{R}}{R^3} \right) = 4p d(\vec{R}) \qquad \vec{B} = \frac{m_0}{4p} \frac{3(\vec{m}\vec{R})\vec{R} - R^2 \, \vec{m}}{R^5} + \frac{2m_0}{3} \vec{m} d(\vec{R})$$

Desarrollo multipolar del potencial vector. Las fuentes puntuales del campo magnetostático.

El dipolo magnético puntual. Introducción del potencial escalar en magnetostática

$$\nabla x\, \vec{B} = 0 \qquad\qquad si\ \vec{R} \neq 0$$

$$\nabla x\, \vec{B} = m_0\, \vec{m}\, x\, \nabla d\,(\vec{R}) \qquad\qquad si\ \vec{R} = 0$$

$$\vec{B} = -m_0 \nabla f_m \qquad\qquad si \quad R \neq 0$$

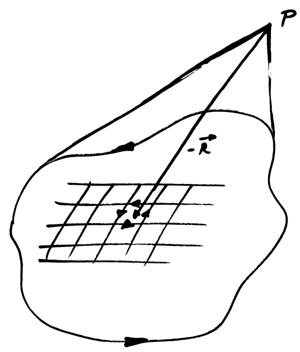
$$f_m = \frac{\vec{m}\, \vec{R}}{4p\ R^3} \qquad\qquad si \quad R \neq 0$$

Desarrollo multipolar del potencial vector. Las fuentes puntuales del campo magnetostático.

Generalización:
Ya que toda corriente puede ponerse como superposicion vectorial de dipolos infinitesimales...

$$\vec{m} = \frac{i}{2}\oint \left(\vec{r}\,' \, x d\vec{l}\,\right) \qquad \vec{m} = i \int_{S'} d\vec{S}\,'$$

$$f_m(\vec{r}) = \frac{i}{4p}\int_{S'} \frac{\vec{R}\, d\vec{S}\,'}{R^3} = -\frac{i\Omega}{4p}$$



Desarrollo multipolar del potencial vector.
Las fuentes puntuales del campo magnetostático.

Distribuciones de dipolos

$$\vec{M} = \frac{d\vec{m}}{dv} \qquad \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{v'} \frac{\vec{M}(\vec{r}\,') \, x \, \vec{R}}{R^3}\, dv' \qquad \vec{M} \, x \, \frac{\vec{R}}{R^3} = \vec{M} \, x \, \nabla'\left(\frac{1}{R}\right) = -\nabla' \, x\left(\frac{\vec{M}}{R}\right) + \frac{\nabla' \, x\vec{M}}{R}$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{v'} \frac{\nabla' \, x\, \vec{M}(\vec{r}\,')}{R}\, dv' + \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{S'} \frac{\vec{M}(\vec{r}\,') \, xd\vec{S}\,'}{R}$$

$$\vec{J}_M = \nabla \, x \, \vec{M}$$

$$\vec{K}_M = \vec{M} \, x \, \vec{n}$$

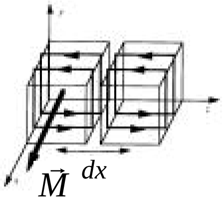
$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{v'} \frac{\vec{J}_M}{R}\, dv' + \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{S'} \frac{\vec{K}_M \, dS'}{R}$$

Desarrollo multipolar del potencial vector. Las fuentes puntuales del campo magnetostático.

Distribuciones de dipolos

$$r_M = -\nabla \vec{M}$$

$$s_M = \vec{M}\ \vec{n}$$



$$\vec{M} = \frac{di\, dS}{dv}\,\vec{k} = \frac{di}{dz}\,\vec{k}$$

$$di = M\ dz = (\vec{M}\ x\,\vec{n})\,dz\,(-\vec{j})$$