Programa

Lección 9
El campo eléctrico y la materia

- 9.1 Introducción.
- 9.2 Electrostática y dieléctricos
- 9.3 El átomo como un dipolo eléctrico. Moleculas polares.
- 9.4 Los dieléctricos como distribución de dipolos. La polarización P.
- 9.5 Campo creado por un dieléctrico polarizado.
- 9.6 El vector desplazamiento D. Susceptibilidad eléctrica. Permitividad eléctrica
- 9.7 Algunos efectos eléctricos y mecánicos en dieléctricos. Aplicaciones
- 9.8 Algunas consideraciones sobre la materia y su estado de condensación
- 9.9 Condiciones en la frontera de separación entre dos dieléctricos.
- 9.10 Medios conductores. Conductividad eléctrica.

Programa

Lección 9
El campo eléctrico y la materia

BIBLIOGRAFIA

Griffiths	Lección 4
Feyman Vol2	Lecciones 10 y 11
Bleaney-Bleaney	Lecciones
Reitz –Milford-Christy	Lecciones 4 y 5

Electrostática y dieléctricos

- Faraday utilizo la palabra dieléctrico para describir el efecto de un aislante en un condensador
- Faraday observó que al situar un aislante entre las placas de un condensador, la capacidad del sistema, la energía almacenada y la carga aumentan un factor k
- k es una característica del medio
- En un dieléctrico las cargas no son libres como en un metal, están ligadas a los átomos o moléculas
- Cuando se aplica un campo eléctrico, el átomo o molécula se polariza (se desplaza la carga negativa respecto de la positiva y se forma un dipolo)

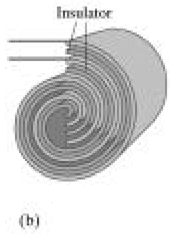
Electrostática y dieléctricos

condensadores

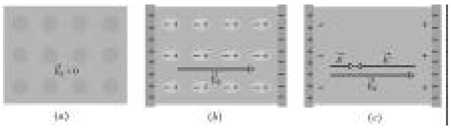
$$D = \sigma_f = \frac{Q}{S}$$

$$V = \frac{Qd}{\varepsilon S}$$

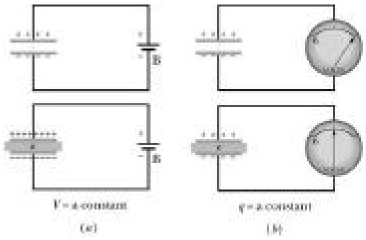
$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\kappa \varepsilon_0 S}{d}$$



el condensador "plano"

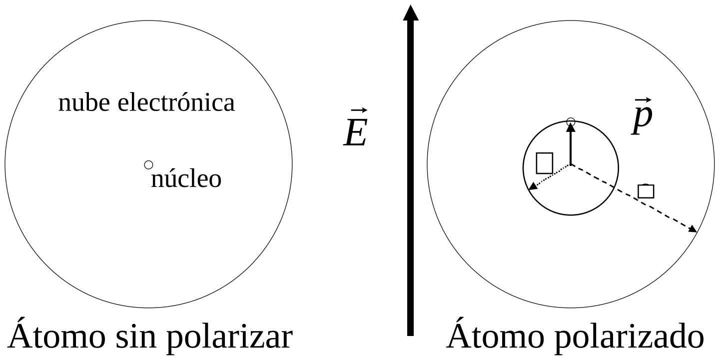


El campo en el dieléctrico



Tensión o carga constante

El átomo como un dipolo eléctrico



Átomo sin polarizar | Átomo polarizado

$$F = ZeE_o = \frac{Zeq_e}{4\pi\varepsilon_o d^2} = -\frac{Z^2e^2d}{4\pi\varepsilon_o a^3}$$

$$d = \frac{4\pi\varepsilon_o a^3}{Ze}E_o$$

$$\rho_e = \frac{Ze}{4\pi a^3/3}$$

$$q_e = \rho_e\frac{4\pi d^3}{3} = -\frac{Zed^3}{a^3}$$

$$\alpha = 4\pi\varepsilon_0 a^3$$

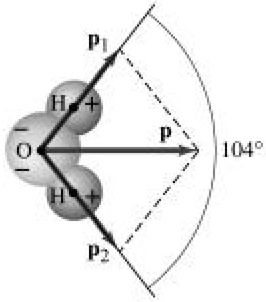
Polarizabilidades atómicas

$a / 4pe_0$ en unidades de 10^{-30} m^3			
H	0.667	He	0.205
Li	24.3	Ne	0.396
Na	23.6	Ar	1.64
K	43.4	Kr	2.48
Rb	47.3	Xe	4.04
Cs	59.6		

Moleculas polares

- Hay moléculas con momento dipolar permanente
- La unidad que caracteriza el momento dipolar es el debye: 1 D=3.34 10^{-30} C m.
- Moléculas grandes, mayor momento dipolar
- Materiales compuestos por moléculas polares: campos internos cuya magnitud depende de T

Momentos dipolares moleculares

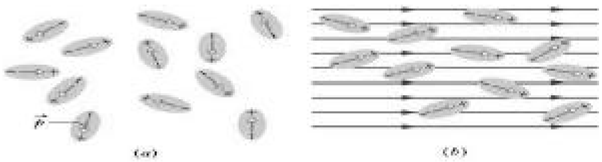


Molécula	m. dip. (D)
HF	1.75
HCl	1.04
HBr	0.80
HI	0.83
H_2O	1.83
NH_3	1.48

Los dieléctricos como distribución de dípolos

Dipolo en un campo eléctrico

$\vec{M} = \vec{p} x \vec{E}$



Momento dipolar promedio $\langle \vec{p} \rangle = \dfrac{\int e^{-U/kT}\, \vec{p}\, d\Omega}{e^{-U/kT}\, d\Omega}$

Si tomamos el eje z como la dirección de $\vec{E} = E_0 \vec{u}_z$

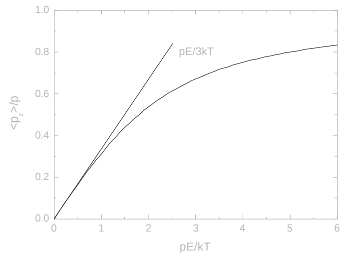
$$\langle p_z \rangle = \frac{p \int_{-1}^{+1} e^{-\left(pE_o/kT \right) \cos q} \cos q \, d(\cos q)}{\int_{-1}^{+1} e^{-\left(pE_o/kT \right) \cos q} \, d(\cos q)} = p\left[\coth\left(\frac{pE_o}{kT} \right) - \frac{kT}{pE_o} \right]$$

Fórmula de Langevin

Los dieléctricos como distribución de dípolos

A partir de la fórmula de Langevin.
Si se hace la aproximación

$$\coth z \approx \frac{1}{z} + \frac{z}{3}$$



Fórmula de Langevin-Debye $$a = a_0 + \frac{p^2}{3kT}$$

Los dieléctricos como distribución de dípolos.
La polarización P

- Para incluir el efecto de la polarizabilidad atómica es necesario introducir un nuevo campo, el campo $\vec{P}(\vec{r})$ polarización

- La polarización es una función vectorial de la posición en el di $\vec{P}(\vec{r})$ trico

- se define como la densidad media de momentos dipolares

Campo creado por un dieléctrico polarizado

Potencial de un dipolo

$$f = \frac{\vec{p}\ \vec{R}}{4pe_0 R^3}$$

La contribución al potencial de un conjunto de dipolos

$$\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dv}$$

$$f(\vec{r}) = \frac{1}{4pe_0}\int_{v'} \frac{\vec{P}(\vec{r}')\,\vec{R}}{R^3}\,dv'$$

Potencial de un medio polarizado

$$f(\vec{r}) = \frac{1}{4pe_0}\int_{s'} \frac{\vec{P}(\vec{r}')\,d\vec{S}}{R} - \frac{1}{4pe_0}\int_{v'} \frac{\nabla\vec{P}(\vec{r}')}{R}\,dv'$$

Potencial en función de las cargas de polarización

$$f(\vec{r}) = \frac{1}{4pe_0}\int_{s'} \frac{s_p\,dS}{R} - \frac{1}{4pe_0}\int_{v'} \frac{r_p}{R}\,dv'$$

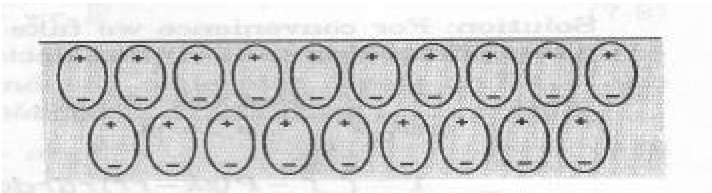
Densidades de carga de polarización

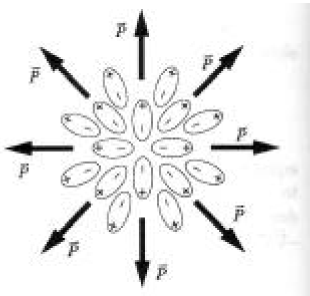
$$\boxed{s_p = \vec{P}\,\vec{n}} \qquad \boxed{r_p = -\nabla\vec{P}}$$

Campo creado por un dieléctrico polarizado

Densidades de carga de polarización

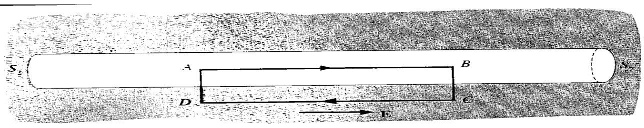
$$\boxed{s_p = \vec{P}\,\vec{n}}$$





$$\boxed{r_p = -\nabla\vec{P}}$$

Campo dentro de un dieléctrico



$\vec{\nabla} x \vec{E} = 0 \quad y \quad \nabla \vec{E} = {}^{r}\!/_{e_0}$ $\oint \vec{E} d\vec{l} = 0$ $\vec{E}_v \vec{l} - \vec{E}_d \vec{l} = 0$

Si la cavidad se orienta en la dirección del campo E

El campo dentro de la cavidad es el mismo dentro y fuera

$$f(\vec{r}) = \frac{1}{4pe_0} \int_{s_0 + s_1 + s_2 + s_c} \frac{\vec{P}(\vec{r}\,')\, d\vec{S}}{R} - \frac{1}{4pe_0} \int_{v_0 - v_1} \frac{\nabla \vec{P}(\vec{r}\,')}{R} dv'$$

$s_p = 0 \; en \; s_c$ $v_1 \rightarrow 0$

$$f(\vec{r}) = \frac{1}{4pe_0} \int_{s_0} \frac{s_p \, dS}{R} + \frac{1}{4pe_0} \int_{v_0} \frac{r_p}{R} dv'$$

El vector desplazamiento eléctrico D. Susceptibilidad y Permitividad eléctrica

- Las ecuaciones fundamentales de la electrostática son

$$\vec{\nabla} x \vec{E} = 0 \quad y \quad \nabla \vec{E} = r / e_0$$

- Estas ecuaciones son correctas en el vacío y en un medio dieléctrico

- Al analizar un medio dieléctrico es co $r(\vec{r}) = r_f(\vec{r}) + r_p(\vec{r})$ arar

$$r(\vec{r}) = e_0 \vec{\nabla} \vec{E} = r_f(\vec{r}) - \nabla \vec{P}$$

- Pero

$$\vec{D} = e_0 \vec{E} + \vec{P}$$

- La combinación es un nuevo vector denominado campo desplazamiento

$$\vec{\nabla} \vec{D} = r \qquad \oint_S \vec{D} d\vec{S} = Q_v$$

- Se cumple la ley de Gauss con las cargas libres

El vector desplazamiento eléctrico D. Susceptibilidad y Permitividad eléctrica

Dieléctricos lineales

- Un aislante o dieléctrico con P proporcional a E es un medio lineal dieléctrico
- (isotropía, homogeneidad, linealidad)
- Se utilizan diversos parámetros que relacionan E, P y D:

Parámetro	Símbolo	Ecuación constitutiva
Susceptibilidad	c_e	$\vec{P} = c_e e_o \vec{E}$
Permitividad	e	$\vec{D} = e \vec{E}$
Constante dieléctrica	$e_r = k$	$e_r = e / e_o$

El vector desplazamiento eléctrico D. Susceptibilidad y Permitividad eléctrica

Dieléctricos lineales

Otra relación de interés es:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \chi_e)$$

χ_e es siempre positivo ya que los dipolos atómicos se alinean con E de forma que P apunta en la dirección de E. Así, $\varepsilon > \varepsilon_0$ y $\kappa > 1$ para cualquier material dieléctrico.

En el vacío, $\chi_e = 0$ $\quad \varepsilon = \varepsilon_0$ $\quad \kappa = 1$

En la materia, los parámetros macroscópicos están determinados finalmente por las propiedades atómicas.

Algunas propiedades electricas y mecánicas de la materia

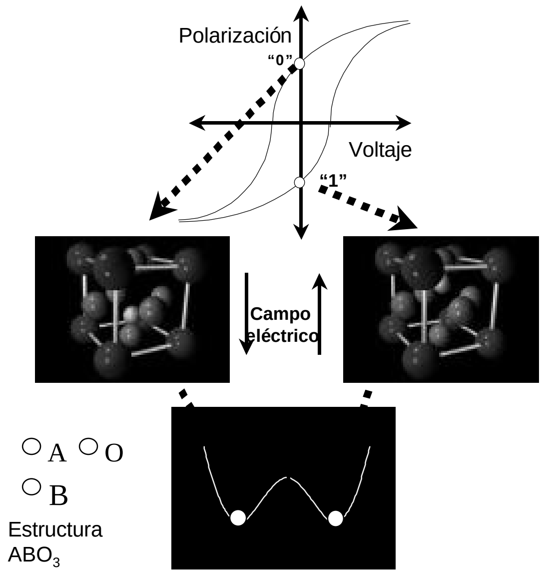
- Piroelectricidad: al aumentar la temperatura, aparece un campo eléctrico en la superficie del cristal (turmalina, el “iman Ceylon”, 1703)
- Ferroeléctricos: materiales en los que la polarización espontánea puede alterarse mediante un campo eléctrico aplicado
- Ferroelásticos: materiales en los que tensiones mecánicas alteran la polarización espontánea
- Piezoeléctrico: material en los que la aplicación de una tensión genera cargas eléctricas en su superficie (efecto piezoeléctrico directo, Pierre Currie, 1880)
- Electrostricción: acoplamiento secundario en el que la tensión es proporcional al cuadrado del campo eléctrico; frecuentemente implica un “efecto piezoeléctrico inverso” (energía eléctrica se convierte en mecánica; Lippman, a partir de principios termodinámicos, Currie experimentalmente en 1881)

Algunas propiedades eléctricas y mecánicas de la materia

¿Qué es la ferroelectricidad?

Los materiales ferroeléctricos muestran una polarización espontánea con el campo eléctrico aplicado debido al desplazamiento atómico del átomo "centrado en cuerpo" en la estructura de la perovskita (ABO_3).

El estado de polarización se mantiene al desaparecer el campo aplicado.



Los ferroeléctricos presentan dos estados estables, base de aplicaciones de memoria

Algunas consideraciones sobre la materia y su estado de condensación

Moléculas polares

- En un gas diluido (moléculas sin interacción),

$$\vec{P} = na\vec{E},\ c_e = na/e_0 \quad y \quad k = 1 + na/e_0$$

- de donde la susceptibilidad adquiere la expresión (fórmula de Langevin-Debye):

$$c_e = \frac{np^2}{3kTe_0}$$

Algunas consideraciones sobre la materia y su estado de condensación

Materia condensada

- El campo responsable de la polarización de una molécula en un medio denso no es el campo macroscópico aplicado $\vec{E}_0$
- A este campo se le denomina campo local o campo molecular $\vec{E}_{loc}$
- La forma de calcular $\vec{E}_{loc}$ es dividir el dieléctrico en dos regiones: una esfera de radio alrededor del punto donde queremos calcular el campo y el resto del dieléctrico (que puede tratarse como un continuo). Finalmente se aplica el principio de superposición.

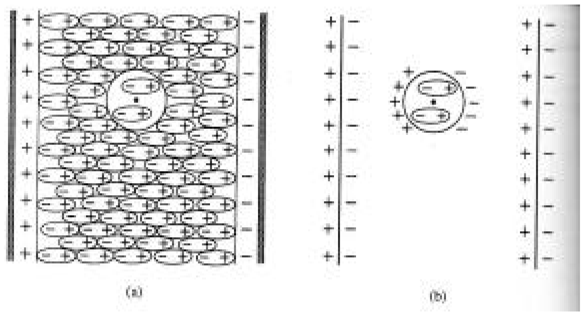
Algunas consideraciones sobre la materia y su estado de condensación

El campo local puede descomponerse en las siguientes contribuciones (figura):

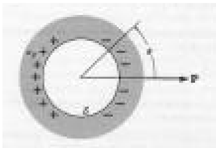
$$\vec{E}_{loc} = \vec{E}_c + \vec{E}_d + \vec{E}_s + \vec{E}_i$$

$$E_c = V/d$$

$$\vec{E}_d = -\vec{P}/\varepsilon_0$$



(a) (b)



$$\vec{E}_s(0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\sigma_b \vec{r}\, dS}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\pi a^3 \vec{P}}{a^3}\int_0^{\pi} \cos^2\theta \sin\theta\, d\theta = \quad = \frac{1}{3\varepsilon_0}\vec{P}$$

Algunas consideraciones sobre la materia y su estado de condensación

Campo macroscópico

$$\vec{E} = \vec{E}_c + \vec{E}_d$$

Campo local de Lorentz

$$\vec{E}_{loc} = \vec{E} + \frac{1}{3e_0}\vec{P}$$

El campo de polarización en un medio polarizado vale

$$\vec{P} = n\vec{p} = na\left(\vec{E} + \frac{\vec{P}}{3e_0}\right)$$

De la relación entre P y E podemos deducir el valor de la susceptibilidad macroscópica

$$c_e = \frac{nae_0}{1 - na/3e_0}$$

Por tanto, la polarizabilidad atómica vale, en función de la susceptibilidad:

$$a = \frac{e_0}{n}\frac{c_e}{1 + c_e/3} = \frac{3e_0}{n}\frac{k-1}{k+2}$$

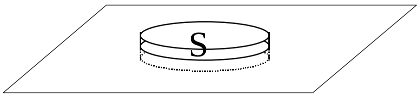
Ecuación de Clausius-Mossotti

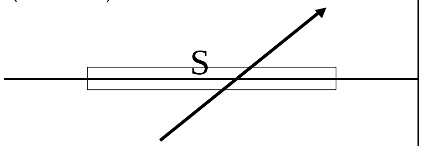
Propiedades dieléctricas de algunos materiales aislantes

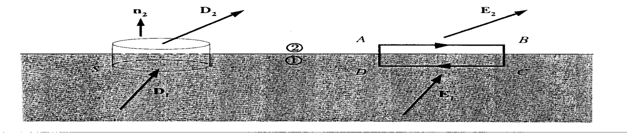
Material	Const. dieléctrica relativa	Tensión dieléctrica
	k	E_{mas} x10^6V/m
Aire	1.00059	3
Poliestireno	2.5	20
Lucita	2.8	20
Plexiglás	3.4	40
Teflón	2.1	60
Mylar	3.1	
Papel	3.7	16
Cuarzo fundido	3.8 a 4.1	
Pyrex	4 a 6	14
Agua	80	
Titanato de estroncio	332	8

Condiciones en la frontera de separación entre dos dieléctricos

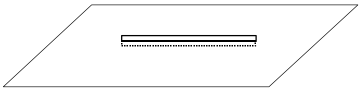
$\nabla \vec{D} = r$ $\qquad$ $\oint \vec{D} d\vec{S} = Q$ $\qquad$ $\left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right)\vec{n}_2 = s$

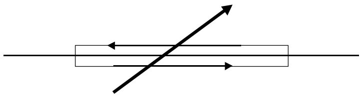






$\nabla x \vec{E} = 0$ $\qquad$ $\left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1\right)\Delta\vec{l} = 0$





$\nabla x \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ $\qquad$ $\int\limits_{S \to 0} \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S} = 0$

$$\left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1\right)\Delta\vec{l} = 0$$

Condiciones en la frontera de separación entre dos dieléctricos

Comportamiento de los campos **E**,**D**,en la interfase entre dos medios materiales

Caso estático

$$f\,(B) - f\,(A) = -\int_A^B \vec{E}_{t-}\, d\vec{l}$$

$$f\,(B') - f\,(A') = -\int_{A'}^{B'} \vec{E}_{t+}\, d\vec{l}$$

$$f\,(\vec{r}) = \frac{1}{4p\, e_0} \int_S \frac{s\,(\vec{r}\,')}{R}\, dS$$

Condiciones en la frontera de separación entre dos dieléctricos

Comportamiento de los campos **E**,**D**, en la interfase entre dos medios materiales

$$\nabla \vec{J} = 0 \qquad\qquad \vec{n}\left[\vec{J}\right] = 0$$

$$s = D_{n+} - D_{n-} = \left(\frac{e_{+}}{s_{+}} - \frac{e_{-}}{s_{-}} \right) J_{n} = \left(t_{+} - t_{+} \right) J_{n}$$

Caso no estacionario

$$\nabla \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = 0 \qquad\qquad \vec{n} \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = 0$$

$$\vec{n}\left[\vec{J}\right] = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{n}\left[\vec{D}\right] = -\frac{\partial s}{\partial t}$$

Medios conductores.

Modelo de Drude

$$r = \frac{qN}{V} = qn$$

$$n\vec{a} = q\vec{E} \quad \rightarrow \quad \vec{a} = \frac{q}{m}\vec{E}$$

$$\vec{v} = \vec{a}t = \frac{q}{m}\vec{E}t = m\vec{E} \qquad\qquad \frac{q}{m}t = m$$

$$\vec{J} = r\vec{v} = \frac{qN}{V}\vec{v} = qnm\vec{E}$$

$$\vec{J} = s\vec{E}$$

$$s = qnm = \frac{q^2}{m}nt$$

Medios conductores.

Conductividad eléctrica

$$\vec{J} = s\,\vec{E}$$

$$\nabla x\vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{J}$$

$$\nabla x\vec{H} = s\,(w)\vec{E} - iw\,e\,(w)\vec{E} = -iw\left[e\,(w) - \frac{is\,(w)}{w}\right]\vec{E}$$

$$\nabla\;\vec{J} + \frac{\partial\;r}{\partial\;t} = 0 \qquad\qquad \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{s\,r}{e} = 0$$

$$r\,(\vec{r},t) = r\,(\vec{r},0)\,e^{-t/t} \qquad\qquad t = \frac{e}{s}$$