PROBLEMAS DE ELECTROMAGNETISMO

(Curso 2003-2004)

OBJETIVOS

Aprender los métodos fundamentales de resolución de problemas relativos a campos electrostáticos y magnetostáticos, en el vacío y en presencia de medios materiales. Así mismo, se abordará la resolución de problemas electromagnéticos no estacionarios y de teoría de circuitos. Durante el curso dedicaremos especial atención a los aspectos conceptuales y al planteamiento de problemas.

REFERENCIAS

- E. Benito, *Problemas de campos electromagnéticos*, Editorial AC, 1972.
- E. López y F. Núñez, *100 Problemas de Electromagnetismo*, Alianza Editorial, 1997.
- M. Fogiel, *Electromagnetics Problem Solvers*, R. E. A., 1988.
- D. J. Griffiths, Introduction to electrodynamics, Prentice Hall 1981.
- M. Zahn, Electromagnetic field theory (a problem solving approach), John Wiley, 1979.
- F. Pomer, *Electromagnetisme Bàsic*, Universitat de València, 1993.
- J. R. Reitz, F. J. Milford y R. W. Christy, *Fundamentos de la teoría Electromagnética*, Addison-Wesley Iberoamericana, 1986.
- R. K. Wangness, *Campos electromagnéticos*, Limusa 1983.

1. Las fuentes del campo electromagnético.

1.1. Expresar $\vec{\nabla}\phi(r)$ en función de las derivadas de $\phi(r)$ siendo $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Aplicarlo a los casos $\phi = \ln r$ y $\phi = r^{-n}$ $(n > 0)$.

1.2. Encontrar el ángulo sólido $\Omega(\theta)$ bajo el que se ve un casquete esférico de semi-amplitud θ_0 desde el centro de la esfera.

1.3. Calcular el flujo de un campo central de la forma $f(r)\vec{r}$ a través de un casquete esférico de semi-amplitud θ_0 y origen en el centro del campo. Aplicarlo al caso de un campo Coulombiano.

1.4. Obtener la divergencia del campo $\vec{r}/r^3$ e interpretar el resultado.

1.5. Encontrar $\Delta(\ln r)$, siendo $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, i Δr, siendo $r = |x|$.

1.6. La densidad de corriente de una distribución de cargas viene dada por

$$\begin{array}{lcc} \vec{J}(\vec{r},t) = \dfrac{qe^{-t/\tau}}{4\pi\tau a^2}\vec{u}_r & \text{si} & r \leq a \\ \vec{J} = 0 & \text{si} & r \geq a \end{array},$$

siendo q, a i τ constantes. a) Obtener la densidad de carga asociada sabiendo que satisface la condición de tender a cero cuando $t \gg \tau$ b) Escribir la ecuación de continuidad en forma diferencial e integral y comprobar que se satisface para un volumen esférico con $r < a$. ¿Dónde se acumula la carga?

1.7. Una esfera de radio a, que tiene una densidad superficial de carga σ, se pone en rotación alrededor de uno de sus diámetros con una velocidad angular ω. a) Calcular la densidad superficial de corriente. b) Determinar la intensidad de corriente que circula entre dos latitudes α y β, y la intensidad total.

2. El campo electrostático.

2.1. Sobre un círculo de radio a se tiene una distribución de carga uniforme, de densidad σ. Determinar el campo eléctrico en puntos del eje normal al círculo que pasa por su centro.

2.2. Un disco está dividido en dos mitades, una con una carga q y la otra con $-q$. Determinar el campo eléctrico sobre el eje del disco.

2.3. Se tiene dos placas conductoras planas e infinitas de espesores e_1 y e_2, que se colocan paralelamente a una distancia d. Ambas placas se cargan de modo que las densidades superficiales totales (es decir, entre las dos caras de cada placa) sean σ_1 y σ_2 respectivamente. Demostrar que las densidades de carga en las dos superficies internas han de ser iguales y opuestas, mientras que las densidades de carga en las dos caras externas han de ser iguales. Expresar estas densidades en función de σ_1 y de σ_2 y analizar distintos casos en función de sus valores relativos y sus signos.

2.4. Sobre una lámina conductora descargada hay una distribución uniforme de carga, de densidad ρ, limitada por una cara del conductor y por un plano paralelo a ella a una distancia a. Calcular el campo eléctrico en cualquier punto del espacio.

2.5. En el interior de una esfera de radio a hay una carga Q distribuida con una densidad $\rho = A(a - r)$. Calcular el campo eléctrico en función de Q y a.

2.6. Dentro de un cilindro de radio a existe una distribución de carga que posee simetría cilíndrica. Expresar el campo eléctrico en función de integrales efectuadas sobre la densidad de carga, dando su forma explícita en los dos casos siguientes: a) $\rho =$constante si $r < a$ y $\rho = 0$ si $r > a$, y b) $\rho = k/r$ si $b < r < a$ y $\rho = 0$ si $r < b$ ó $r > a$.

2.7. El potencial medio temporal de un átomo de hidrógeno neutro viene dado por

$$\phi(r) = \frac{qe^{-\alpha r}}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(1 + \frac{\alpha r}{2}\right) ,$$

donde q es la carga electrónica y $\alpha = 2/a_0$, siendo a_0 el radio de Bohr. Hallar la distribución de carga que dará lugar a ese potencial e interprétese el resultado.

2.8. Un anillo de grosor despreciable está cargado con una densidad uniforme λ. Hallar el potencial y el campo eléctrico en un punto cualquiera del eje de simetría del anillo.

2.9. Calcular el campo eléctrico en puntos del eje z creado por una distribución lineal de carga dada por: $+\lambda$ si $-a < y < 0$, $x = 0$, $z = 0$ y $-\lambda$ si $0 < y < a$, $x = 0$, $z = 0$.

2.10. En una nube de partículas cargadas en equilibrio la densidad de carga depende de la distancia al origen r según: $\rho = \rho_0(1 - r^2/a^2)$, $0 < r < a$ y $\rho = 0$ si $r > a$. Calcular el potencial electrostático.

2.11. Una esfera metálica de radio a se encuentra a potencial cero. Exteriormente está rodeada por una capa esférica que se extiende hasta un radio $r = b$ y tiene una densidad de carga ρ. Hallar el potencial en cualquier punto del espacio.

3. El campo magnetostático.

3.1. Calcular, por integración directa, el campo magnético creado por una corriente filiforme indefinida que transporta una intensidad de corriente I.

3.2. Calcular, por integración directa, el campo magnético creado por una espira circular de radio a que transporta una corriente I, en un punto del eje perpendicular al plano de la espira y que pasa por su centro. Determinar el valor del potencial vector en puntos muy próximos al eje de la espira.

3.3. Obtener el campo magnético que crea un solenoide rectilíneo de longitud L y N espiras, sobre su eje de simetría. Hallar el valor para un solenoide infinito. ¿Cómo es el campo en el caso de un solenoide toroidal de radio medio R?

3.4. Obtener un potencial vector para los siguientes campos magnéticos: (a) campo uniforme y (b) campo de una corriente filiforme rectilínea indefinida.

3.5. En la región $a < r < b$ de un cilindro indefinido circulan corrientes distribuidas con densidad $J = A(r - a)$, siendo las líneas de corriente paralelas al eje del cilindro. a) Calcular el campo magnético $\vec{B}$ en todo el espacio. b) Comparar el campo interior con el que se obtendría si la corriente estuviera distribuida uniformemente en la corona circular comprendida entre los radios a y b. c) Representar $\vec{B}$ en función de r para ambos casos.

3.6. En un conductor cilíndrico indefinido se ha practicado una cavidad también cilíndrica cuyo eje es paralelo al del cilindro inicial y está situado en posición excéntrica. El conductor está recorrido por una corriente I distribuida uniformemente en toda la sección transversal. Sea a el radio de la cavidad, b el del cilindro conductor y d la distancia entre los ejes de ambos, de modo que $a + d < b$. a) Demostrar que $\vec{B}$ es uniforme en la cavidad. b) Expresar el potencial vector para puntos situados a distancias $r > b$ del conductor.

3.7. Una corriente de intensidad I procedente de $z \to \infty$ desciende por el eje z hasta el origen de coordenadas y allí se distribuye isótropamente sobre el plano $z = 0$. Determinar el campo magnético que crea.

3.8. Una espira cuadrada de espesor despreciable, situada en el plano xy y con su centro en el origen de coordenadas, es recorrida por una corriente I. Hallar el potencial vector para puntos del eje z. Determinar $\vec{B}$ en puntos del eje. Calcular $\vec{B}$ en puntos alejados y hallar la posición, dimensiones e intensidad de la espira circular que produce el mismo campo lejano.

3.9. Por un cilindro conductor, hueco, indefinido, de radio a y grosor despreciable, circula una densidad de corriente superficial $\vec{K}$, que asciende por la pared lateral formando un ángulo θ con las generatrices del cilindro. Calcular el campo magnético en todo el espacio.

3.10. El filtro de velocidades de un espectrógrafo de masas está formado por un campo magnético uniforme y constante $B = 1$ T y un campo eléctrico $\vec{E}$ perpendicular a $\vec{B}$, creado por las placas de un condensador plano separadas 5 mm. En este filtro se introducen iones de potasio ($Z = 19$). Del filtro salen únicamente iones con una velocidad de 300 Km/s. Los iones entran a continuación en la cámara del espectrógrafo, donde existe un campo magnético $\vec{B}_2$ perpendicular a su trayectoria. Los iones acaban impactando en una película fotográfica perpendicular al eje del tubo, produciendo dos manchas en las posiciones $D_1 = 30$ cm y D_2. Sabiendo que $D_2 > D_1$ y que el potasio tiene dos isótopos de 20 y 22 neutrones, determinar:
a) El valor de B_2. b) El valor de D_2. c) La energía con la que llegan los iones a la película. d) Existirá corriente entre las armaduras de los condensadores? (Datos: $m_p = m_n = 1.67 \cdot 10^{-24}$ g).

3.11. Los electrones pasan sin desviarse a través de las placas del aparato de Thomson cuando el campo eléctrico aplicado es de 3000 V/m y el campo magnético cruzado es de 0.14 mT. Si las placas tienen 4 cm de longitud y el extremo de las placas dista 30 cm de la pantalla, determinar la posición a la que impactan los electrones sobre la pantalla cuando se interrumpe el campo magnético. (Datos: $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} Kg.$)

4. Desarrollo multipolar del campo electromagnético.

4.1. Calcular los momentos dipolar y cuadrupolar de las siguientes distribuciones de carga: a) Tres cargas, de valor q, q y $-2q$ situadas en los vértices de un triángulo equilátero de lado a. b) Cuatro cargas, de valor q,$-q$,q y $-q$ situadas en los vértices de un cuadrado de lado a. Repetir el cálculo con las mismas cargas, pero distribuidas de la forma q, q, $-q$ $-q$. c) Tres cargas de valor q, q y $-q$ situadas en los vértices de un triángulo equilátero de lado a.

4.2. Dadas dos cargas $+q$ y $-q$ situadas en $(0, 0, a/2)$ y en $(0, 0, -a/2)$, respectivamente, calcular el momento dipolar y las componentes del momento cuadrupolar del sistema en coordenadas cartesianas. Deducir, a partir de estos resultados, cómo se comporta el potencial creado por estas cargas a grandes distancias comparadas con a. Analizar el caso del límite $a \to 0$ y $q \to \infty$ (siendo $qa = cte = p$)

4.3. Dos cargas puntuales de valor q están separadas por una distancia d. a) Determinar el comportamiento del campo eléctrico a grandes distancias comparadas con d y elegir el origen de coordenadas idóneo. b) Aplicando el teorema de Gauss, calcular el ángulo, respecto del eje definido por las dos cargas, que forman en el infinito las líneas de campo que salen de una de las cargas normalmente a ese eje. c) Repetir el apartado b para aquellas líneas que emergen de la carga formando un ángulo de 60°.

4.4. Determinar el comportamiento del campo eléctrico creado por un disco dividido en dos mitades con carga $+q$ y $-q$, en puntos del eje normal por su centro y a grandes distancias comparadas con el radio del disco.

4.5. Sobre un disco de radio a se tiene una densidad de carga que varía según la ley:

$$\sigma(r) = \frac{q}{2\pi a\sqrt{a^2 - r^2}} \quad .$$

a) Obtener el campo en puntos del eje normal al disco por su centro y en puntos próximos al mismo. b) Dar el comportamiento del potencial a distancias grandes comparadas con a, escribiendo los dos términos dominantes.

4.6. Una esfera de radio a está dividida en dos hemisferios cargados uniformemente con densidades ρ y $-\rho$ respectivamente. Calcular el campo eléctrico en puntos del eje de simetría y estudiar su comportamiento a distancias mucho mayores que a.

4.7. Dos distribuciones lineales de carga paralelas, rectilíneas e indefinidas, están separadas una distancia a, y tienen densidades lineales $+\lambda$ y $-\lambda$. a) Calcular el potencial en todo el espacio. b) Calcular el potencial cuando la distancia entre los hilos es muy pequeña respecto al resto de distancias del problema. c) Calcular una distribución lineal equivalente de dipolos, para el apartado anterior.

4.8. Se tiene una distribución lineal de dipolos con forma de anillo de radio a, centrada respecto al origen y situada en el plano $z = 0$, cuya densidad lineal de momento dipolar es $t\vec{u}_z$. Calcular el potencial y el campo en los puntos del eje z. Estudiar su comportamiento a grandes distancias.

4.9. a) La molécula de ácido clorhídrico tiene un momento dipolar de 1.02 D (1 Debye = 3.33×10^{-30} C·m) y la longitud del enlace es de 1.28 Å. Calcular la transferencia de carga efectiva. b) La molécula de agua tiene un momento dipolar de 1.84 D, la longitud del enlace O–H es 0.958 Å y el ángulo H–O–H es de 105°. Calcular la carga transferida por cada átomo de H.

4.10. Utilizando el concepto de potencial escalar, calcular el campo magnético creado por una espira plana circular que transporta una corriente I, en un punto del eje perpendicular al plano que pasa por el centro de la espira.

4.11. Sea una espira circular que conduce una corriente de intensidad I. Calcular: a) El potencial vector en puntos en los que pueda considerarse válida la aproximación dipolar y b) el campo magnético para esos mismos puntos.

4.12. Una esfera conductora cargada con una densidad superficial σ uniforme gira alrededor de uno de sus diámetros con velocidad angular ω constante. a) Calcular el campo magnético producido por la distribución de corriente equivalente al desplazamiento de carga, en puntos de dicho diámetro, para distancias $r > a$ y $r < a$, siendo a el radio de la esfera. b) Calcular el momento dipolar magnético de la distribución equivalente de corrientes.

4.13. Un solenoide semiinfinito de radio a, de n espiras por unidad de longitud y por el que circula una corriente I está situado coaxialmente al semieje z negativo. a) Calcular el campo magnético a lo largo del eje z, determinando los límites de la expresión para $z \to +\infty$ y $z \to -\infty$. b) Calcular, utilizando la aproximación dipolar, el campo magnético en cualquier punto del espacio. ¿A qué tipo de fuente sería equivalente dicho solenoide para puntos situados muy lejos del origen?

4.14. Dos discos paralelos de radios a y b tienen carga Q y $-Q$ repartida uniformemente en su superficie. Los discos giran alrededor de su eje común con velocidad angular ω. Determinar: a) El campo magnético en puntos del eje de los discos. b) El momento magnético de los dos discos. b) El campo magnético en puntos alejados de los discos.

5. Inducción electromagnética.

5.1. Con un hilo conductor se construye una horquilla de lados paralelos indefinidos separados por una distancia d y se sitúa en el seno de un campo magnético uniforme perpendicular a su plano. Un segmento AB, de resistencia R, se desplaza, por la acción de una fuerza exterior, con aceleración constante de modo que nunca pierde contacto con los lados de la horquilla. a) Calcular la fem inducida en el circuito que cierra el lado AB. b) Siendo la resistencia de la horquilla por unidad de longitud β Ω/cm, determinar la intensidad que lo recorre en función del tiempo.

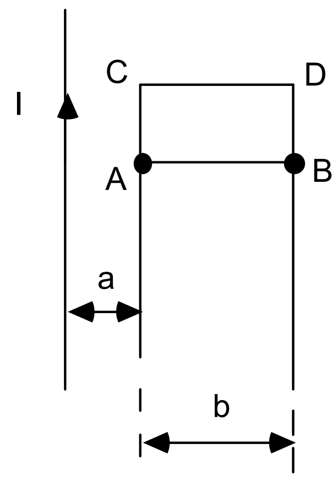
5.2. Una espira rectangular, de lados a y b ($a > b$) y un cable bifilar por el que circula una corriente

$$I = I_0 e^{-kt}$$

están situados en un mismo plano. El lado mayor de la espira es paralelo al cable. La distancia entre los hilos del cable es d, así como la distancia entre el lado de la espira y el cable más próximo. Calcular la fem inducida en la espira.

5.3. En el plano de una espira rectangular, de lados a y b, y paralelamente a uno de sus lados, se encuentra un hilo conductor rectilíneo que transporta una corriente I. Calcular la fem inducida en la espira cuando se desplaza con velocidad v con respecto al hilo conductor.

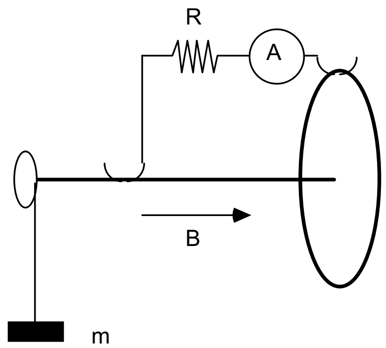
5.4. En el campo magnético de una corriente rectilínea, vertical e indefinida se halla el circuito dibujado en la figura. Los carriles, también verticales tienen una resistencia de β Ω/cm. El tramo móvil AB y el fijo CD tienen entre ambos una resistencia R. Calcular la fuerza que es necesario aplicar a la barra móvil AB, cuya masa es M , para que caiga con velocidad constante v_0.



5.5. Un dipolo magnético de magnitud m está situado en el origen de coordenadas y orientado en la dirección del eje z. Desde una altura h se deja caer una espira conductora de radio a ($a \ll h$), masa M y resistencia R. Calcular: (a) la corriente inducida en la espira, (b) la fuerza magnética ejercida sobre la espira y (c) su ecuación del movimiento.

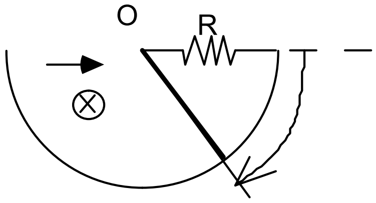
5.6. En el seno de un campo magnético vertical y uniforme B se sitúa una espira rectangular de lados a y b, resistencia R y masa m de modo que puede girar alrededor de uno de los lados de longitud a que se mantiene horizontal. a) Determinar al intensidad de la corriente que circula a través de la espira cuando se la abandona desde una orientación arbitraria respecto a la vertical. b) Escribir la ecuación del movimiento y hallar sus posibles soluciones en el caso de ángulos pequeños con la vertical.

5.7. Un disco conductor homogéneo, de radio b y masa M, puede girar libremente alrededor de su eje, también conductor. Solidario con él se encuentra una polea de masa despreciable y radio a en la que se arrolla un hilo del que cuelga una masa m. Se sitúa el conjunto en el seno de un campo magnético uniforme B, normal al disco, y se toman dos contactos, uno en el eje y otro en la periferia del disco que se unen a un galvanómetro a través de una resistencia R. Se deja libre la masa colgante en el instante $t = 0$ y se pide: a) hallar la intensidad que pasa por el galvanómetro; b) la ley de movimiento de la masa que pende, demostrando, en particular, que llega a alcanzar una velocidad límite.



5.8. Un campo magnético que tiene simetría de revolución está definido por sus componentes en coordenadas cilíndricas B_z y B_r. En una región del espacio próxima al eje vertical z, la componente B_z está descrita por la ley $B_z = B_0 + kz$ (B_0 y k son constantes). a) Demuéstrese que en esa región $B_r \approx -kr/2$. b) Se coloca un pequeño anillo conductor de radio a, masa m y resistencia R, horizontalmente con su centro sobre el eje z y se le deja caer; calcúlese la intensidad inducida en el anillo. c) Dedúzcase la expresión que da la ley del movimiento del anillo y obténgase su velocidad final.

5.9. Una varilla conductora de longitud a y masa m puede girar en un plano vertical (por efecto de la gravedad) alrededor de uno de sus extremos, O, mientras que el otro se mantienen en contacto eléctrico con un arco de circunferencia de un material conductor de resistencia eléctrica despreciable. El circuito se cierra con una resistencia R y el conjunto se coloca en el seno de un campo magnético uniforme, tal como indica la figura. a) Calcular la corriente inducida que recorre el circuito cuando la varilla se deja caer desde un ángulo inicial φ_0; justificar el sentido de la corriente. b) Calcular el momento que debemos aplicar a la varilla para que gire con velocidad angular constante.



5.10. Calcular el flujo que crea una espira pequeña de radio b, con una corriente i, sobre una espira de radio a situada en un plano paralelo al de la primera espira, coaxial con ella y siendo z la distancia entre los centros ($z \gg b$, $a \gg b$). Calcular el coeficiente de inducción mutua entre ambas espiras.

5.11. Un cable conductor rígido, de longitud L, gira entorno a uno de sus extremos con velocidad angular ω. Calcular la fem inducida por un campo magnético perpendicular al plano del movimiento.

6. El campo electromagnético en medios materiales.

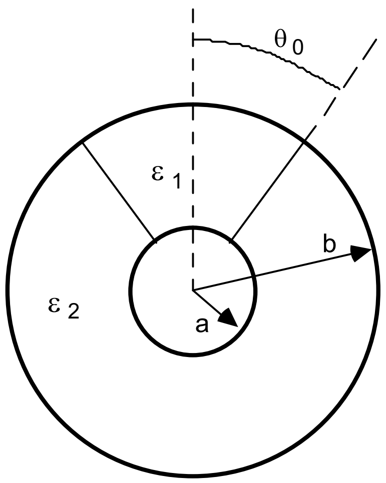
6.1. Una carga q está situada en el centro de una esfera dieléctrica de permitividad ε. Hallar: a) El campo eléctrico en todo el espacio, b) la polarización del dieléctrico, c) la densidad de carga de polarización, d) la densidad superficial de polarización, y e) repetir el cálculo del campo eléctrico a partir de todas las cargas del problema.

6.2. La constante dieléctrica de un medio que llena completamente el espacio entre los electrodos de un condensador esférico de radios a y b está dada por $\varepsilon = \varepsilon_1 = cte.$ para $a < r < c$, donde $a < c < b$, y $\varepsilon = \varepsilon_2 = cte.$ para $c < r < b$. a) Calcular las densidades de carga de polarización en los dos dieléctricos y la carga total de polarización.

6.3. Sobre un plano existe una distribución de carga de densidad σ. Si sobre una parte se adosa una capa dieléctrica de constante ε y espesor a, calcular el campo eléctrico en todo el espacio, así como la polarización y las cargas de polarización.

6.4. Una carga puntual se encuentra en el centro de una capa esférica de radios $a < b$ formada por una sustancia dieléctrica de constante $\varepsilon = kr$. Calcular los campos $\vec{E}$ y $\vec{D}$ en todo el espacio. Calcular el vector polarización. Calcular las cargas equivalentes de polarización y obtener $\vec{E}$ como resultante de dichas cargas.

6.5. Se tiene un condensador esférico de radios interior a y exterior b y en el espacio entre las placas dos dieléctricos de permitividades ε_1 y ε_2 de modo que el dieléctrico de permitividad ε_1 rellena el espacio delimitado por las armaduras y un cono de semiangulo θ_0 con vértices en el centro de las esferas tal como indica la figura. El resto del espacio entre placas corresponde al dieléctrico de constante ε_2. Se pide a) Demostrar que el campo es radial en cualquier punto del espacio entre placas. b) Calcular la distribución de cargas en las dos zonas en que quedan divididas las placas.



6.6. La región $z < 0$ del espacio está ocupada por un dieléctrico cuya constante dieléctrica ε depende de la coordenada z según la ley

$$\varepsilon = \frac{2\varepsilon_0}{2 - e^{kz}} \quad ,$$

siendo $k > 0$, mientras que el semiespacio $z > 0$ es el vacío. Sobre la superficie del medio material se coloca una distribución de carga de densidad constante ρ que se extiende desde $z = 0$ hasta $z = d$. Determinar el potencial eléctrico en todo el espacio. Hallar las cargas de polarización.

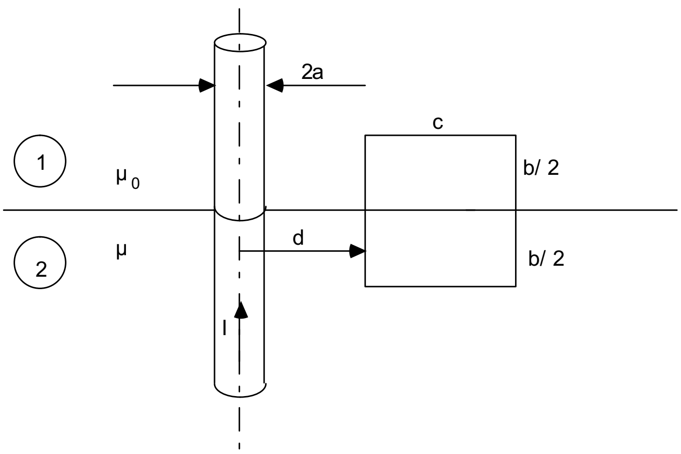
6.7. Calcular el campo magnético creado por un cilindro imanado uniformemente en la dirección del eje axial, con polarización magnética M_0, a partir de las corrientes equivalentes y a partir de las cargas magnéticas equivalentes.

6.8. Un material conductor en forma de barra cilíndrica indefinida de radio a está recorrido por una corriente I uniformemente distribuida en su sección transversal. Su permeabilidad magnética es constante e igual a μ. Calcular a) $\vec{B}$, $\vec{H}$ y $\vec{M}$, b) las corrientes equivalentes de imanación, y c) $\vec{\nabla}\times\vec{B}$ y $\vec{\nabla}\times\vec{H}$, explicando la forma de ambos. d) Verificar las condiciones en la superficie límite para $\vec{B}$, $\vec{H}$ y $\vec{M}$.

6.9. (a) Repetir el problema anterior considerando ahora que la corriente no está uniformemente distribuida, sino que sigue la ley $J = kr$. (b) Repetir el problema considerando de nuevo la corriente uniformemente distribuida pero suponiendo que la permeabilidad magnética del material varía según la ley $\mu = \mu_0(1 + r/a)$.

6.10. Calcular el campo magnético creado por una esfera uniformemente imanada, con imanación $\vec{M}_0$, en los puntos del eje de la esfera paralelo a la dirección de polarización, tanto por el método de las cargas como por el de las corrientes equivalentes.

6.11. Un alambre de radio a, rectilíneo e indefinido transporta una corriente I. Alrededor del alambre, un semiespacio es el vacío y otro es un medio material de permeabilidad μ, tal como indica la figura. Se sitúa una espira rectangular de resistencia R en las proximidades del alambre. (a) Calcular el campo magnético $\vec{B}$ fuera del alambre. (b) Calcular la imanación del medio material y las corrientes equivalentes.



6.12. Dada una lámina material de grosor d, uniformemente imantada en la dirección perpendicular a las superficies, calcular el campo magnético $\vec{B}$ y estudiar su comportamiento en las superficies.

6.13. En una región del espacio existe una distribución cilíndrica de densidad de momento dipolar $\vec{M} = m_0\vec{u}_\phi$. Calcular las corrientes equivalentes y el campo magnético fuera del cilindro.

6.14. Un toroide de radio medio a y N espiras está formado por un material magnéticamente lineal de permeabilidad μ. El toroide tiene un entrehierro de longitud e. Calcular el campo magnético en el entrehierro cuando pasa una corriente I por sus espiras.

7. Energía electrostática.

7.1. Calcular la energía electrostática de las siguientes distribuciones de carga: a) Una carga Q distribuida uniformemente en la superficie de una esfera de radio a. b) Una carga Q uniformemente distribuida en el volumen de una esfera de radio a. c) La misma carga Q distribuida en una esfera de radio a con una densidad de carga ρ proporcional a $(r/a)^n$, donde r es la coordenada radial en esféricas y $n \geq 0$. Calcular en este último caso el valor del parámetro n que da lugar a una energía electrostática mínima, manteniendo Q constante.

7.2. Una esfera conductora hueca, de masa m, flota con una cuarta parte de su volumen sumergido en un dieléctrico líquido cuya permitividad es ε ¿A qué potencial debe cargarse la esfera para que flote con la mitad sumergida?

7.3. Dos cáscaras conductoras, esféricas, concéntricas, de radios a y b, se mantienen a potenciales V_1 y V_2 respectivamente. La región intermedia se llena con un medio dieléctrico. Calcular la energía electrostática del sistema.

7.4. Calcular la fuerza que ejercen entre sí dos dipolos puntuales de valor $\vec{p}_1$ y $\vec{p}_2$ separados una distancia d en los siguientes supuestos: a) $\vec{p}_1 = p\vec{u}_z$ situado en el punto $(0, -d/2, 0)$ y $\vec{p}_2 = p\vec{u}_z$ situado en $(0, d/2, 0)$. b) $\vec{p}_1 = p\vec{u}_z$ situado en el punto $(0, 0, -d/2)$ y $\vec{p}_2 = p\vec{u}_z$ situado en $(0, 0, d/2)$ c) $\vec{p}_1 = p\vec{u}_z$ situado en el punto $(0, -d/2, 0)$ y $\vec{p}_2 = p\vec{u}_y$ situado en el punto $(0, d/2, 0)$.

7.5. Un condensador plano tiene una placa móvil de superficie A. Si se le aplica una *ddp* constante, calcular la fuerza entre las placas en función de la distancia que las separa, d.

7.6. En un condensador plano de placas rectangulares introducimos lentamente una lámina dieléctrica de permitividad ε y anchura igual a la distancia entre las placas del condensador, de forma que en un instante determinado una parte x de la longitud del condensador está llena de material. a) Si el condensador tiene una carga Q y está aislado, determínese la fuerza que actúa sobre el dieléctrico. b) Calcúlese dicha fuerza en el caso de que se mantenga constante la *ddp* entre las placas.

7.7. a) Calcular la energía electrostática por unidad de longitud necesaria para cargar uniformemente (densidad ρ) un cilindro homogéneo de radio a. Suponer que dicho cilindro está situado concéntricamente en un hueco cilíndrico de radio b ($b > a$) practicado en un conductor indefinido a potencial cero. b) Repetir el cálculo del apartado anterior para el caso en que el hueco está relleno de un material de permitividad ε. c) Calcular en ambos casos la densidad superficial de carga inducida en las paredes del hueco cilíndrico.

8. Energía magnética.

8.1. Una línea coaxial está formada por un hilo conductor interior de radio a rodeado por otro de radio $b > a$ y grosor despreciable. El conductor interior transporta una corriente I distribuida uniformemente, que vuelve por el conductor exterior. Hallar la energía magnetostática almacenada por unidad de longitud. Repetir el problema suponiendo que el grosor del segundo conductor no es despreciable.

8.2. Hallar la energía almacenada en una sección de longitud l de un solenoide largo de radio R que conduce una corriente I y tiene arrolladas n vueltas por unidad de longitud.

8.3. Una varilla delgada de material magnético de permeabilidad μ y área de la sección transversal A, se introduce a lo largo del eje de un solenoide largo de n vueltas por unidad de longitud. Si la varilla se saca hasta que la mitad de su longitud permanezca dentro del solenoide, calcular despreciando el efecto de los bordes la fuerza que aparece sobre la varilla.

8.4. Calcular la energía magnética en un anillo toroidal de N vueltas, sección cuadrada (lado a) por el que circula una corriente I. El radio de la circunferencia que describen los centros de las espiras igual a R.

8.5. Sea un solenoide de radio a, longitud L y n espiras por unidad de longitud. A una distancia h de una de sus bases se coloca una espira coaxial, de radio $b \ll a$. (a) Hallar el coeficiente de inducción entre ambos elementos. (b) Evaluar la fuerza que se ejerce sobre la espira cuando circulan sendas corrientes I e i por el solenoide y por la espira.

9. Energía y momento electromagnéticos.

9.1. Calcular el vector de Poynting de una onda plana linealmente polarizada que se propaga en el vacío. Calcular el promedio temporal del flujo de energía, así como las densidades promedio de energía eléctrica y magnética. Comparar ambos resultados.

Si el vector de Poynting de una onda plana que viaja en el vacío vale 5 W/m^2, calcular la densidad de energía que transporta.

9.2. Considérese un hilo conductor rectilíneo e indefinido de conductividad σ que transporta una corriente I distribuida uniformemente en su sección transversal. Aplicar el teorema de Poynting a una longitud L del cable.

9.3. El campo de radiación de una determinada antena viene dado aproximadamente por:

$$H_\varphi = \sin\theta \cos(\omega t - \beta r) \; ; E_\theta = 377 H_\varphi \; .$$

Determinar la potencia radiada a través de una superficie esférica de radio R con centro en el origen.

9.4. Aplicar el teorema de Poynting a una longitud l de un solenoide indefinido de radio a en cuyo interior se encuentra un material magnético de permeabilidad μ, alimentado con una intensidad $I(t)$. Demostrar que la energía contenida en una longitud l de solenoide es $LI^2/2$.

9.5. Aplicar el teorema de Poynting al volumen interior de un condensador plano de placas circulares, de superficie S y separación d. El condensador se carga con una corriente constante I.

9.6. Aplicar el teorema de Poynting complejo a un buen conductor que ocupa un semiespacio sobre el que incide, con incidencia normal, una onda plana.

9.7. Calcular la fuerza electrostática sobre un conductor ideal a partir del tensor de Maxwell.

9.8. Calcular el tensor de Maxwell de una onda plana.

10. El potencial electrostático.

10.1. Obtener por el método de las imágenes el potencial correspondiente a un dipolo eléctrico situado: (a) frente a un plano conectado a potencial cero y (b) frente a una esfera conectada a potencial cero, vertical a uno de sus radios.

10.2. Calcular el potencial electrostático: a) en los puntos (x, y, z) con $y > 0$ y $z > 0$, cuando los semiplanos $z = 0$ con $y > 0$ e $y = 0$ con $z > 0$ se hallan a potencial cero y se sitúa una carga puntual q en $(0, a, b)$, con a y b positivos y b) En cualquier punto del espacio cuando una carga puntual q se sitúa a una distancia d de un plano dieléctrico semiinfinito de permitividad ε.

10.3. (a) Calcular el potencial electrostático en el espacio limitado por dos semiplanos conductores paralelos, a potencial cero y separados una distancia a, y una banda conductora situada entre los extremos de los planos a potencial V. (b) Obtener la densidad de carga que se induce sobre cada uno de los conductores.

10.4. Con cuatro láminas conductoras muy largas se forma un prisma de sección rectangular de lados $2a$ y $2b$. Determinar el potencial dentro del prisma cuando dos caras opuestas se conectan a tierra y las otras dos a potenciales $\pm V$.

10.5. Una esfera está dividida en dos hemisferios que se mantienen a potenciales $\pm V$. Obtener el potencial eléctrico en el interior de la esfera. ¿Qué modificaciones habríamos de introducir para tener el potencial en el volumen exterior?.

10.6. Un cilindro infinito de radio a está partido longitudinalmente en dos mitades que se mantienen a potenciales $\pm V$. Hallar el potencial en puntos del interior.

10.7. Una esfera conductora de radio a se halla a potencial cero en el seno de un campo inicialmente uniforme E_0. Determinar el potencial y obtener la fuerza que se ejerce sobre cada uno de los hemisferios en que queda dividida la esfera por un plano normal a E_0 por su centro.

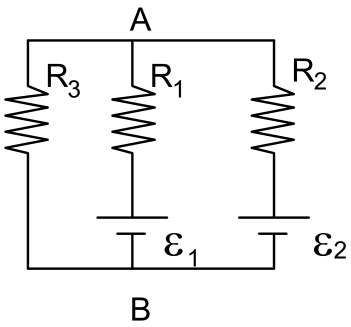
10.8. Una esfera dieléctrica de radio a se halla en el seno de un campo inicialmente uniforme. Hallar el potencial.

10.9. En el centro de una corteza esférica de radio a, que se mantiene a potencial V, hay un dipolo de momento p. Hallar el potencial en el interior de la esfera. Si la esfera está dividida en dos hemisferios por un plano normal al dipolo, ¿cuál es el menor valor de V para que los hemisferios se mantengan unidos?

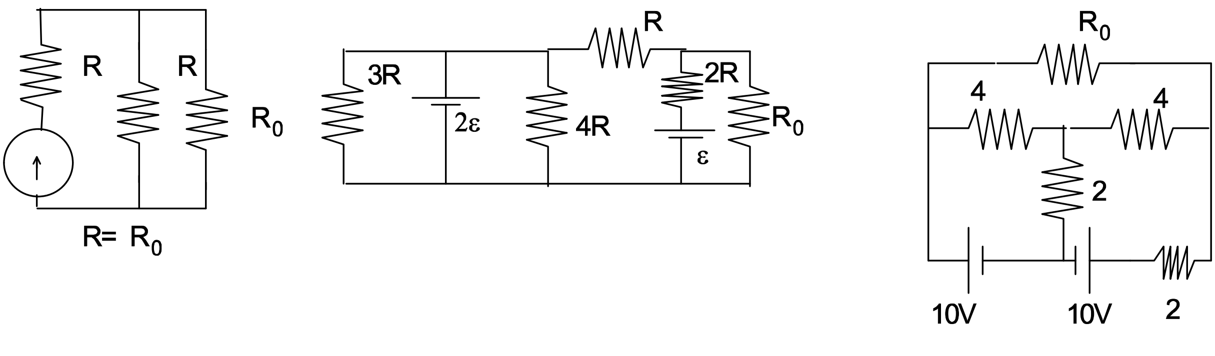
10.10. Se tiene un conductor a potencial V con un hueco esférico de radio b. En dicho hueco se sitúa una superficie esférica no conductora de grosor despreciable, de radio a ($b = 2a$), concéntrica con el hueco, que tiene un potencial $V_0 \cos\theta$. Se pide:
a) Calcular el potencial electrostático para $r < a$. b) Calcular el potencial electrostático para $a < r < b$. c) Calcular las densidades superficiales de carga en $r = b$ y en $r = a$. d) Calcular, para $V = 0$, la energía electrostática del sistema.

11. Teoría de circuitos. Corrientes estacionarias.

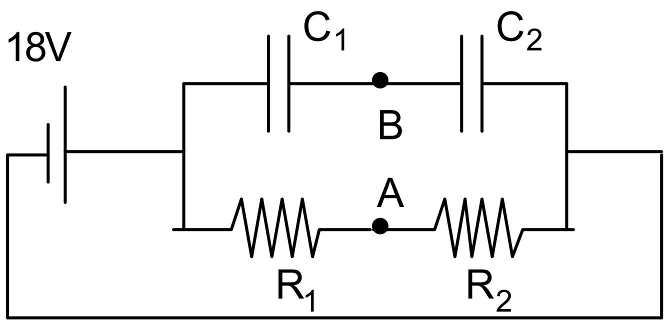
11.1. Calcular la corriente que circula por cada una de las ramas que constituyen el circuito de la figura. Datos: $R_1 = 2\ \Omega$, $R_2 = 5\ \Omega$, $R_3 = 5\ \Omega$, $\varepsilon_1 = 10$ V, $\varepsilon_2 = 20$ V.



11.2. Calcular la intensidad que pasa por R_0 para los circuitos de la figura.

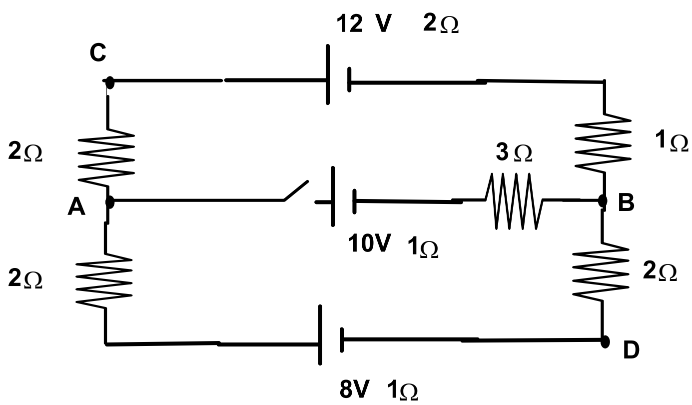


11.3. Calcular $V_A - V_B$ en el circuito de la figura. Calcular V_B una vez cortocircuitados los puntos A y B. $C_1 = 6\ \mu$F, $C_2 = 3\ \mu$F, $R_1 = 6\ \Omega$, $R_2 = 3\ \Omega$.

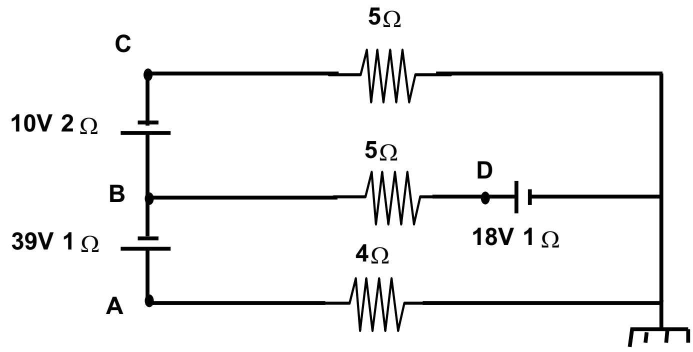


11.4. Un medio material poco conductor, de conductividad σ, rellena el hueco entre dos conductores cilíndricos coaxiales de radios a y b, $a < b$. Calcular la resistencia por unidad de longitud de este sistema.

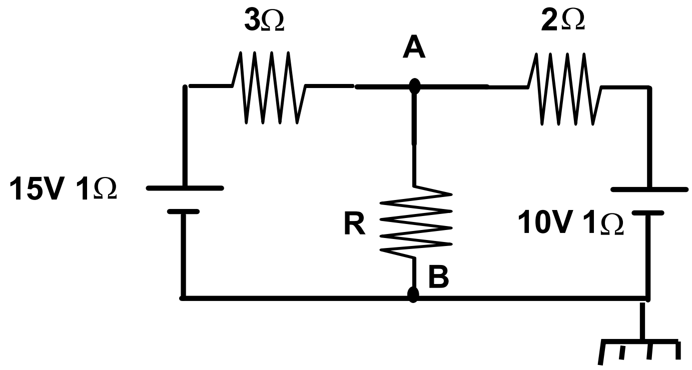
11.5. En el esquema de la figura determinar las diferencias de potencial entre los puntos A y B, C y B, D y C, A y D con el interruptor abierto y con el interruptor cerrado.



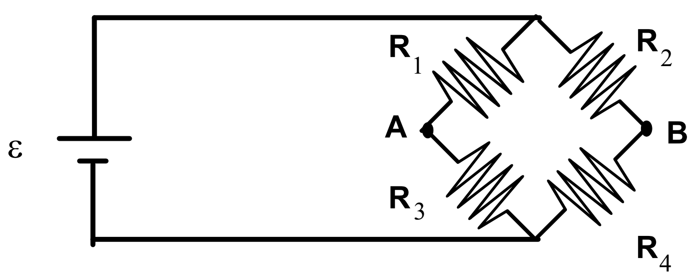
11.6. En el circuito de la figura, determinar:
a) Las intensidades de cada rama. b) la *ddp* entre los bornes de cada generador.
c) Los potenciales en los puntos A, B, C y D.



11.7. En el circuito de la figura se conecta entre los puntos A y B una resistencia de 1 Ω y luego otra de 5 Ω. Aplicando el teorema de Thevenin calcular la potencia disipada por dichas resistencias.

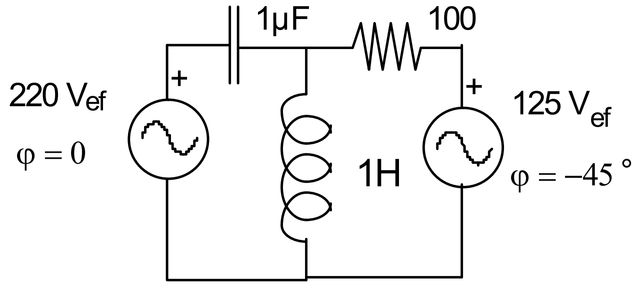


11.8. Obtener el circuito equivalente Thevenin del circuito de la figura. Calcular el valor de R_3 en función de R_1, R_2 y R_4 para que la diferencia de potencial entre A y B sea nula.

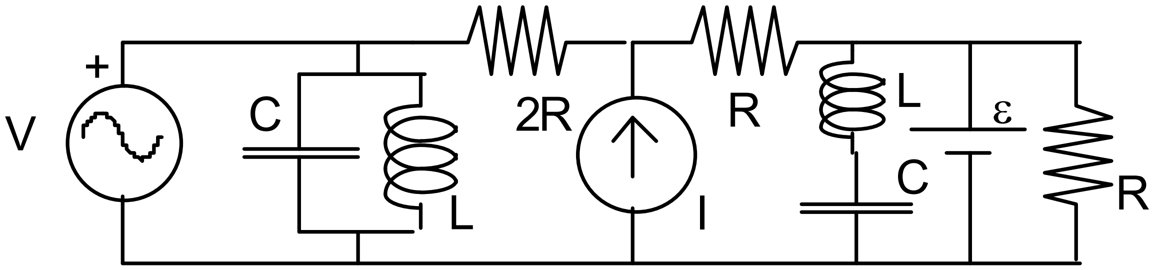


12. Circuitos de corriente alterna.

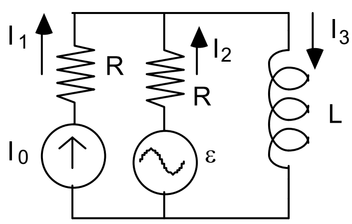
12.1. Calcular las intensidades que circulan por cada rama del circuito de la figura y comprobar la conservación de la energía. Frecuencia angular: 100π rad/s.

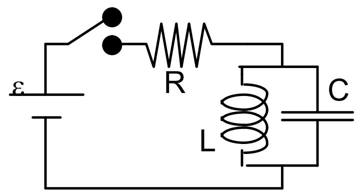


12.2. Calcular la intensidad que circula por cada una de las ramas del circuito, siendo $V = V_0 \sin \omega t$, $I = I_0 \sin \omega t$ y $LC = 1/\omega^2$.



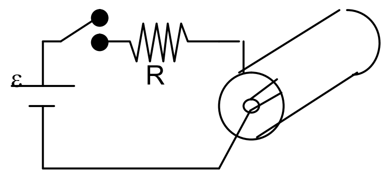
12.3. El circuito de la figura está formado por un generador de corriente continua I_0, un generador de fem alterna, de amplitud ε y frecuencia angular ω, dos resistencias de valor R y una autoinducción de valor $L = R/\omega$. Se pide: a) Calcular las intensidades instantáneas que circulan por cada rama del circuito. b) Calcular las energías instantánea y media almacenadas por la autoinducción. c) Calcular las potencias medias consumidas por cada componente pasivo y las proporcionadas por los generadores, comprobando la conservación de la energía.



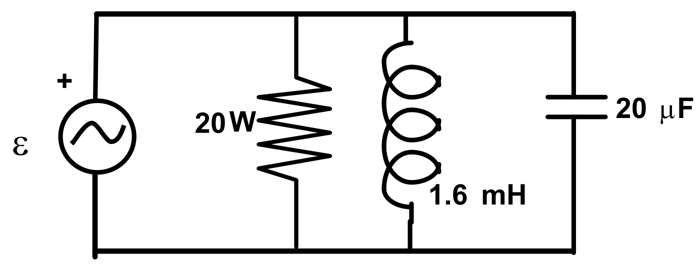


12.4. El interruptor del circuito de la figura se cierra en $t = 0$. Calcular $V(t)$. Datos: $R = 5/4$ kΩ, $L = 3$ H, $C = 4/3$ μF y ε=200 V.

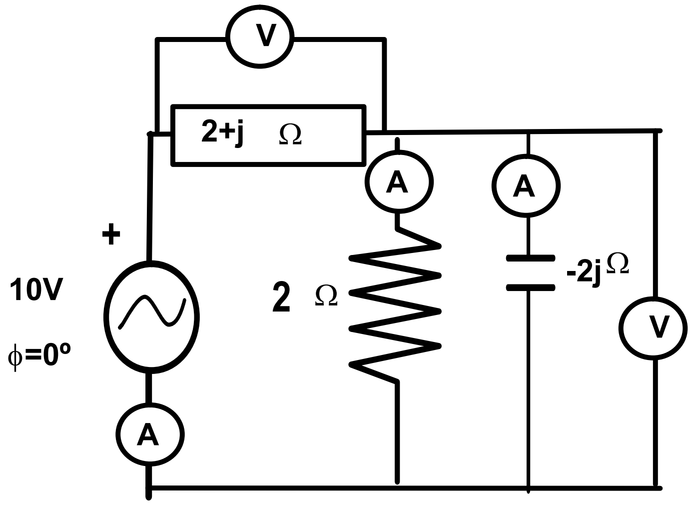
12.5. Sea un condensador cilíndrico formado por dos cilindros conductores coaxiales de radios a y b, $a < b$. El espacio que separa los cilindros está ocupado por un dieléctrico de permitividad ε. La longitud del condensador L es mucho mayor que los radios a y b. a) Calcular la capacidad del condensador y el transitorio de carga del condensador al cerrar el circuito de la figura. b) Calcular la energía que da el generador, la que consume la resistencia y la almacenada por el condensador y comprobar que se conserva en cada instante. c) Suponer, ahora, que el dieléctrico del condensador tiene una cierta conductividad σ. Calcular el transitorio de carga en este caso.



12.6. La $f.e.m.$ aplicada al circuito de la figura es $\varepsilon = 50\text{sen}\ (5000t + \pi/4)$, expresada en voltios. Hallar los valores complejos eficaces de la $f.e.m$ y de las corrientes de cada rama y las funciones temporales correspondientes. Hallar la impedancia total, la potencia disipada por cada una de las impedancias y la potencia aportada al circuito por el generador.



12.7. En el circuito de la figura, calcular la lectura de los aparatos que se muestran, la potencia consumida por cada impedancia y la potencia suministrada por el generador.



12.8. La impedancia Z del circuito de la figura es de tipo inductivo. Sabiendo que su factor de potencia es de 0.8 y que tiene un consumo de 176 W con una diferencia de potencial entre sus extremos de 220 V, calcular la $f.e.m.$ del generador y la lectura del amperímetro.