Leccion 1.
Definicion de variedad diferenciable

1.1.– Definiciones basicas

1. Sea X un conjunto. Una **carta** (valorada en $\mathbf{R}^n$) es un par $c = (U, \varphi)$ donde

   (a) U es un subconjunto de X;

   (b) φ es una biyeccion de U en un abierto de $\mathbf{R}^n$ (considerado como espacio de Banach).

2. Sean $c = (U, \varphi)$, $c' = (U', \varphi')$ cartas. Se dice que son **C^r-compatibles** si satisfacen

   (a) $\varphi(U \cap U')$ (resp. $\varphi'(U \cap U')$) es abierto en $\mathbf{R}^n$;

   (b) $\varphi \circ \varphi'^{-1} : \varphi'(U \cap U') \to \varphi(U \cap U')$ es de clase C^r (resp. $\varphi' \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap U') \to \varphi'(U \cap U')$ es de clase C^r).

3. Llamaremos **C^r-atlas** a un conjunto de cartas C^r-compatibles dos a dos tales que los dominios recubren X, ie., $\cup_{i \in I} U_i = X$.

4. Dos C^r-atlas $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ son **C^r-equivalentes** si y solo si $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ es un C^r-atlas. Esta relacion es de equivalencia.

5. Llamamos **variedad de dimension n** (recordemos que las cartas estan valoradas en $\mathbf{R}^n$) **y clase C^r** y denotaremos por $(X, \mathcal{A})$ a un conjunto X dotado de una clase $\mathcal{A}$ de C^r-atlas C^r-equivalentes.

6. Diremos que la variedad de dimension n y clase C^r es **variedad diferenciable** si $r = \infty$.

7. Generalmente, cuando C^r pueda ser sobrentendido, se abandona la sobrecarga de nomenclatura y se habla simplemente de cartas/cartas compatibles/atlas/atlas equivalentes. Asimismo, es usual sobrentender el atlas particular $\mathcal{A}$ cuando este suficientemente claro y usar expresiones como " X es una variedad", en lugar de "$(X, \mathcal{A})$ es una variedad".

8. Sea $(X, \mathcal{A})$ una variedad de dimension n y clase C^r, y sean $\xi^1, \ldots, \xi^n$ aplicaciones de un subconjunto U de X en $\mathbf{R}$. Se dice que $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n)$ es un **sistema de coordenadas de X en U**, si el par (U, ξ) es una carta de X, y la denotaremos por $(U; \xi)$ o $(U; \xi^1, \ldots, \xi^n)$. Si $a \in U$ se dice que ξ es un **sistema de coordenadas de X en a**; si ademas $\xi^i(a) = 0$ para todo i, diremos que el sistema de coordenadas ξ esta **centrado en a.**

1.2.– Ejemplos

9. **No-Ejemplo** *(Atlas inequivalentes)*: Sea $\mathbf{R}$ con dos atlas dados por una unica carta $\mathcal{A}_1 = \{(\mathbf{R}, id),\ id : \mathbf{R} \to \mathbf{R}\}$ y $\mathcal{A}_2 = \{(\mathbf{R}, \varphi),\ \varphi : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : x \mapsto x^3\}$. Los atlas no son C^1-equivalentes.
   Para verlo basta probar que $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 = \{(\mathbf{R}, id),\ (\mathbf{R}, \varphi)\}$ no es C^1-atlas. La exigencia de C^1-compatibilidad entre las cartas implicaria que $id \circ \varphi^{-1} = \sqrt[3]{t}$ fuese C^1, pero no lo es en $t = 0$. Las cartas no son compatibles, $\mathcal{A}$ no es un atlas y por tanto $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ no son equivalentes.