Leccion 15.
Definicion de campo vectorial

15.1.– Concepto de campo vectorial

1. (**nota.**) *Un campo vectorial (diferenciable) definido en un abierto U de la variedad diferenciable X se definira como una aplicacion (diferenciable) que va a asignar a cada punto $a \in U \subset X$ un vector tangente a X en a, ie., un elemento de T_aX.*

2. (**def.**) Sea X variedad diferenciable y TX su variedad tangente. Sea $\pi : TX \to X$ la proyeccion canonica (que es sumersion suprayectiva). Llamamos a una seccion local diferenciable ξ de (TX, X, π) **campo vectorial local** diferenciable sobre U. En el caso que $U = X$ diremos que se trata de un **campo vectorial global** o simplemente de un **campo vectorial**.

3. El conjunto de los campos vectoriales sobre X se denota por $\mathfrak{X}(X)$ o tambien por $\Gamma(TX)$. El conjunto de los campos vectoriales locales sobre $U \subset X$ se denota por $\mathfrak{X}(U)$ o por $\Gamma(TX; U)$.

4. (**nota.**) *Con esta definicion tenemos que $\xi(a) \in \pi^{-1}(a) = T_aX$, para $a \in U$.*

5. (**nota.**)*Es comun denotar por ξ_x al vector tangente a X en x inducido por el campo vectorial ξ, ie., $\xi_x := \xi(x)$. Esta notacion ayuda, en algunas circunstancias, a ahorrar algunos parentesis.*

6. La *diferenciabilidad de ξ* se reduce a la comprobacion de que, para toda carta $c = (U, u)$ de X en a, se tiene que:

   (a) el dominio de la expresion de ξ en las cartas dadas $\Xi := \widetilde{u} \circ \xi \circ u^{-1}$ es abierto, y

   (b) que en este dominio dicha expresion local Ξ es diferenciable.

   Notese que estamos utilizando la carta $\widetilde{c} = (\widetilde{U}, \widetilde{u})$ de TX en $\pi^{-1}(a)$, inducida por c para dotar a TX de la estructura de variedad diferenciable.

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{U} \subset T(X) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\widetilde{u}"] & U \subset X \arrow[l, bend left, "\xi"] \arrow[d, "u"] \\
u(U) \times \mathbf{R}^m \subset \mathbf{R}^{2m} & u(U) \subset \mathbf{R}^m \arrow[l, "\Xi = \widetilde{u} \circ \xi \circ u^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

7. Consideremos para cada $x \in U$ las componentes de $\xi(x)$ en la base[1] $\{\partial_{u^i,x}\}_{1 \le i \le m}$ de $T_x(X)$. Denotamos a estas componentes por $\xi(x)^i$, $1 \le$

---

[1]En lo sucesivo utilizaremos la notacion abreviada $\partial_{u^i,x}$ para denotar $\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_x$.

$i \leq m$. Sabemos que estas componentes vienen dadas por $\xi(x)^i = (\xi(x))\,(u^i)$, y tenemos que

$$\xi(x) = \sum_{1 \leq i \leq m} \xi(x)^i . \partial_{u^i,x} = \sum_{1 \leq i \leq m} (\xi(x))\,(u^i) . \partial_{u^i,x}$$

permite definir nuevas funciones $\xi^i : U \to \mathbf{R}$ cuyo valor en $x \in U$ son las $\xi(x)^i$, ie.,

$$\xi^i(x) := \xi(x)^i = (\xi(x))\,(u^i)$$

tal que

$$\xi(x) = \sum_{1 \leq i \leq m} \xi^i(x) . \partial_{u^i,x} .$$

Estas funciones reciben el nombre de **componentes de ξ en la carta c.**

8. El dominio de $\Xi = \widetilde{u} \circ \xi \circ u^{-1}$ es

   $$u(U \cap \xi^{-1}(\pi^{-1}(U))) = u(U \cap (\pi \circ \xi)^{-1}(U) = u(U \cap (id|_U)^{-1}(U) = u(U)$$

   que es abierto, por ser c carta de X.

9. Sea $(t^1, \ldots, t^m) \in u(U)$, tendremos

   $$\begin{aligned} \Xi(t^1, \ldots, t^m) &= (\widetilde{u} \circ \xi \circ u^{-1})(t^1, \ldots, t^m) \\ &= \widetilde{u}\left(\xi^i(u^{-1}(t^1, \ldots, t^m))\partial_{u^i, u^{-1}(t^1, \ldots, t^m)}\right) \\ &= (t^1, \ldots, t^m; (\xi^1 \circ u^{-1})(t^1, \ldots, t^m), \ldots, (\xi^m \circ u^{-1})(t^1, \ldots, t^m)) \end{aligned}$$

   Esta aplicacion es diferenciable si y solo si cada una de las aplicaciones $(\xi^i \circ u^{-1}) : u(U) \to \mathbf{R}$ son diferenciables. En consecuencia, ξ es diferenciable si y solo si para toda carta c de X, las componentes de ξ en las cartas son funciones diferenciables.

10. EL conjunto $\Gamma(TX)$ de los campos vectoriales diferenciables en X forma un $C^\infty(X)$-modulo. En efecto, sean $f, g \in C^\infty(X)$, y sean ξ, η campos vectoriales, la aplicacion $f\xi + g\eta : X \to TX$ definida por $(f\xi + g\eta)(x) = f(x)\xi(x) + g(x)\eta(x)$ es claramente un nuevo campo vectorial diferenciable.

11. Sea $c = (U, u)$ una carta de X, definimos los **campos vectoriales coordenados** locales

    $$\partial_{u^i} : U \to T(U) \ : \ \partial_{u^i}(x) \mapsto \partial_{u^i,x}$$

    De este modo tendremos

    $$\xi|_U = \sum_{1 \leq i \leq m} \xi^i \partial_{u^i} \ : \ \xi|_U(x) = \sum_{1 \leq i \leq m} \xi^i(x) \partial_{u^i,x}$$

    donde $\xi^i : U \to \mathbf{R}$ son las componentes del campo vectorial local ξ en la carta c.

15.2.– Campos vectoriales como derivaciones

12. (**nota.**) *Los vector tangente a X en un punto son, como vimos, derivaciones del algebra de las funciones definidas en entornos de dicho punto, de modo que si $v \in T_aX$, entonces $v : C^\infty(X) \to \mathbf{R}$. Analogamente los campos vectoriales ξ determinan derivaciones D_ξ de las funciones $f \in C^\infty(X)$, dando lugar a funciones $D_\xi(f) \in C^\infty(X)$.*

13. Sea $T^*(X)$ la variedad cotangente, $\pi : T^*(X) \to X$ la correspondiente proyeccion canonica. Las secciones (locales) de $(T^*(X), X, \pi)$ se llaman **campos de covectores**[2] (locales). Sea $f \in C^\infty(X)$, la *diferencial de f*, $df : X \to T^*(X) : x \mapsto d_xf$ es un campo de covectores de X, ie., $df \in \Gamma(T^*(X))$.

14. Sea ξ un campo vectorial diferenciablee sobre X, y sea $f \in C^\infty(X)$. Denotamos por $\langle \xi, df \rangle$ o tambien $D_\xi(f)$ o incluso $\xi(f)$ a la funcion $X \to \mathbf{R} : x \mapsto \langle d_xf, \xi(x) \rangle$.

15. Sea $(u^1, \ldots, u^m)$ un sistema de coordenadas de X en U, y ξ un campo vectorial diferenciable local sobre U. Sea $f \in C^\infty(U)$, $x \in U$ entonces
$$(D_\xi f)(x) \quad = \quad \langle d_xf, \xi(x) \rangle = \sum_{1 \leq i \leq m} \xi^i(x).\left(\frac{\partial f}{\partial u^i}\right)(x) = \left(\sum_{1 \leq i \leq m} \xi^i.\frac{\partial f}{\partial u^i}\right)(x)$$
ie.,
$$D_\xi f = \sum_{1 \leq i \leq m} \xi^i.\frac{\partial f}{\partial u^i}$$
donde $\xi^i : U \to \mathbf{R}$ es la i-esima componente de ξ en la carta (U, u).

16. (**prop.**)*Para $f \in C^\infty(X)$ prefijada, la aplicacion $\xi \mapsto D_\xi(f)$ es $C^\infty(X)$-lineal.*[3]

17. (**prop.**) *Sean $f, g \in C^r(X)$, $f.g$ su producto; si ξ es un campo vectorial diferenciable sobre X, se tiene*
$$D_\xi(f.g) = D_\xi(f).g + f.D_\xi(g),$$
de modo que ξ define una **derivacion** *$D_\xi : C^r(X) \to C^{r-1}(X)$ del algebra de funciones $C^{r-1}(X)$ en el $C^r(X)$-modulo $C^{r-1}(X)$.*

18. Sea $(u^1, \ldots, u^m)$ un sistema de coordenadas de X en U, y ξ un campo vectorial local sobre U. La i-esima cordenada de ξ en la referencia del espacio tangente definido por $(u^1, \ldots, u^m)$ (ie., los campos vectoriales coordenados locales) es $D_\xi(u^i)$, es decir
$$\xi = \sum_{1 \leq i \leq m} D_\xi(u^i).\partial_{u^i}.$$

---
[2]Por no usar el termino “campo covectorial”, que suena raro.
[3]Recordemos que $\Gamma(TX)$ es un $C^\infty(X)$-modulo.

En efecto,

$$\begin{aligned}
\xi(x) &= \sum_{1\leq i\leq m} \left(D_\xi(u^i)\right)(x).\left(\partial_{u^i}\right)(x) = \sum_{1\leq i\leq m} \langle d_x u^i, \xi(x)\rangle \partial_{u^i,x} \\
&= \sum_{1\leq i\leq m} \xi(x)^i . \partial_{u^i,x}
\end{aligned}$$

ya que

$$\begin{aligned}
\langle d_x u^i, \xi(x)\rangle &= \langle d_x u^i, \sum_{1\leq j\leq m} \xi(x)^j \partial_{u^j,x}\rangle = \sum_{1\leq j\leq m} \xi(x)^j \langle d_x u^i, \partial_{u^j,x}\rangle \\
&= \sum_{1\leq j\leq m} \xi(x)^j \delta^i_j = \xi(x)^i
\end{aligned}$$

Lo que nos permite escribir

$$\xi^i(x) = \xi(x)^i = (\xi(x))(u^i) = \left(D_\xi(u^i)\right)(x)$$

19. (**nota.**) *Los campos vectoriales actuan tanto sobre la variedad X, dando lugar a la seccion $X \to T(X)$, como sobre el alegbra de funciones definido sobre la variedad, dando lugar a la derivacion $C^r(X) \to C^{r-1}(X)$*[4]*. Podriamos denotar ambas acciones mediante la yuxtaposicion y escribir $(\xi(x))(f) = (\xi(f))(x)$. Para diferenciar una de la otra hemos decidido dejar la yuxtaposicion para el primer caso y explicitar la accion sobre funciones con la notacion D_ξ, tal que $(D_\xi f)(x) = (\xi(f))(x)$ y es igual a $(\xi(x))(f)$.*

[4] y su generalizacion trivial en el caso $C^\infty(X)$.