Leccion 16.
Campos vectoriales φ-relacionados. *Push-forward* y *pull-back* de campos vectoriales y 1-formas.

16.1.– Campos vectoriales φ-relacionados. *Push-forward*.

1. (**def.**) Sea $\varphi : X \to Y$ un morfismo de variedades, ξ un campo vectorial local diferenciable sobre $U \subset X$, η un campo vectorial local diferenciable sobre $V \subset Y$. Decimos que $\underline{\xi \text{ } \mathbf{esta}}$ $\underline{\varphi\text{-}\mathbf{relacionado\ con}\ \eta}$ si para todo $x \in U \subset X$ el diagrama es conmutativo

$$\begin{array}{ccc} T(U) \subset T(X) & \xrightarrow{T(\varphi)} & T(V) \subset T(Y) \\ \uparrow \xi & & \eta \uparrow \\ U \subset X & \xrightarrow[\varphi]{} & V \subset Y \end{array}$$

   ie., si $\eta(\varphi(x)) = (T_x(\varphi))(\xi(x)),\ \forall x \in U \subset X$.

2. (**prop.**) *Supongamos que ξ, η son campos vectoriales locales diferenciables sobre $U \subset X,\ V \subset Y$ respectivamente, y que estan φ-relacionados. Entonces el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} C^r(Y) & \xrightarrow{\varphi^*} & C^r(X) \\ D_\eta \downarrow & & \downarrow D_\xi \\ C^{r-1}(Y) & \xrightarrow[\varphi^*]{} & C^{r-1}(X) \end{array}$$

   donde $\varphi^* f = f \circ \varphi$, es conmutativo.

3. (**demo**) Sea $f \in C^r(Y),\ a \in U \subset X,\ b \in V \subset Y$ con $b = \varphi(a)$. La aplicacion $\varphi^* f = f \circ \varphi$ es un elemento de $C^r(X)$ tal que

$$f(b) = f(\varphi(a)) = (f \circ \varphi)(a) = \varphi^* f(a).$$

   Tendremos, evaluando la composicion superior, que $D_\xi \circ \varphi^* : C^r(Y) \to C^{r-1}(X)$. Evaluando sobre f, se tiene que $(D_\xi \circ \varphi^*)(f) \in C^{r-1}(X)$ que se puede aplicar sobre el punto $a \in U \subset X$.

$$\begin{aligned} ((D_\xi \circ \varphi^*)(f))\,(a) &= (D_\xi(\varphi^* f))\,(a) = (\xi(a))\,(\varphi^* f) \\ &= (\xi(a))(f \circ \varphi) = ((T_a\varphi)(\xi(a)))\,(f) \end{aligned}$$

   donde $((T_a\varphi)(\xi(a))) \in T_{\varphi(a)}Y$, ie., T_bY.

Utilizando la composicion inferior, $(\varphi^* \circ D_\eta) : C^r(Y) \to C^{r-1}$, que evaluada sobre la funcion $f \in C^r(Y)$ conduce a $C^{r-1}(X)$; al aplicarla sobre el punto $a \in U \subset X$, tendremos

$$\begin{aligned} ((\varphi^* \circ D_\eta)(f))\,(a) &= (\varphi^* \circ D_\eta f)(a) = (D_\eta f \circ \varphi)(a) \\ &= (D_\eta f)(\varphi(a)) = (\eta(\varphi(a)))\,(f) \end{aligned}$$

Para ξ, η φ-relacionados $\eta(\varphi(a)) = (T_a(\varphi))\xi(a)$, y ambas expresiones coinciden, haciendo el diagrama conmutativo *qed*

4. (**prop./def.**)

   (a) *Si φ es un difeomorfismo local*[1] *de $U \subset X$ en $V \subset Y$, para todo campo vectorial η sobre Y existe un unico campo vectorial ξ sobre X, φ-relacionado con η.*

   (b) *Sea φ es difeomorfismo local, ξ, η campos vectoriales sobre $U \subset X$, $V \subset Y$ respectivamente, φ-relacionados la correspondencia $\xi \mapsto \eta$ define una aplicacion, el* ***push-forward* de campos vectoriales**, *$\varphi_* : \Gamma(TX; U) \to \Gamma(TY; V)$ tal que $\varphi_* \xi := T(\varphi) \circ \xi \circ \varphi^{-1}$*

5. (**nota.**) *Por simplicidad, considerese el caso $X = Y$. En esta situacion, $T(\varphi) \circ \xi$ no es un campo vectorial, puesto que al evaluarlo en el punto $x \in X$ se obtiene $(T(\varphi) \circ \xi)(x)$ perteneciente a $T_{\varphi(x)}X$, en lugar pertenecer a $T_x X$.*
   El punto de evaluacion de la aplicacion tangente puede ser omitido, pero en ningun caso puede ser obviado puesto que $\xi(x) \in T_x X$ y en consecuencia $(T(\varphi))(\xi(x)) \equiv (T_x(\varphi))(\xi(x)) \in T_{\varphi(x)}X$.

6. (**nota**) *Notese que la condicion de difeomorfismo local no puede ser debilitada si queremos garantizar la existencia, porque para construir el 'push-forward' del campo vectorial diferenciable ξ necesitamos la aplicacion inversa φ^{-1}. Dicho de otro modo, sin la condicion de difeomorfismo local, no esta garantizada la existencia de un campo vectorial local diferenciable en $V \subset Y$ que este φ-relacionado con ξ.*

16.2.– ***Pull-back*** de campos de covectores/ 1-formas.

7. Sea $\varphi : X \to Y$ un morfismo de variedades, y sea ω un campo de covectores local y diferenciable definido sobre $V \subset Y$, ie., $\omega \in \Gamma(T^*(Y)|_V)$. Se define un campo de covectores (local y diferenciable) sobre $U = \varphi^{-1}(V) \subset X$ por

$$(\varphi^*\omega)(x) :=^t T_x(\varphi)(\omega(\varphi(x)), \quad x \in U \subset X.$$

Donde se ha utilizado que $T^*_x(\varphi) : T^*_{\varphi(x)}Y \to T^*_x X$ coincide con ${}^tT_x(\varphi)$. Llamamos a $\varphi^*\omega$ el ***pull-back* de ω por φ.**

[1]Llamado tambien morfismo *étale*.

8. La aplicacion $\varphi_* : \Gamma^*(T^*(Y)|_V) \to \Gamma(T^*(X)|_U) : \omega \mapsto^t T(\varphi) \circ \omega \circ \varphi$ se denomina ***pull-back* de** φ y se determina punto a punto por la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd}
T_x^*X & T^*_{\varphi(x)}(Y) \arrow[l, "T_x^*(\varphi)\equiv {}^tT_x(\varphi)"'] \\
X \arrow[u, "\varphi^*\omega"] \arrow[r, "\varphi"'] & Y \arrow[u, "\omega"']
\end{tikzcd}$$

9. (**nota.**) *EL pull-back tiene ciertas ventajas/desventajas respecto del push-forward. La ventaja es que su construccion depende de φ (no de φ^{-1}) y de la trapuesta de $T_x(\varphi)$ por lo que su existencia no requiere la imposicion de que φ sea un difeomorfismo local, ie., dada $\omega \in \Gamma(T^*(Y)|_V)$ siempre es posible encontrar su* pull-back *en $\Gamma(T(X)|_U)$. El inconveniente es que $T_x^*(\varphi)$ solo esta definido localmente: recordemos que la aplicacion tangente $T(f)$ entre variedades tangente $T(X)$, $T(Y)$ inducida por un morfismo de variedades $f : X \to Y$ no se extiende a una aplicacion tangente entre las variedades cotangente, por lo que tener el* pull-back *definido globalmente requeriria que φ fuese un difeomorfismo.*