Leccion 2.
Topologia subyacente a la estructura de variedad

2.1.– Topologia subyacente a la estructura de variedad

1. **Prop.** *Sea $\mathcal{A}$ un atlas sobre un conjunto X. La familia $\mathcal{B}_{\mathcal{A}}(X) = \{\varphi_i^{-1}(W) : i \in I,\ W \subset \mathbf{R}^n$ abierto$\}$ es base de una topologia sobre X.*

2. (Recordatorio) Dado un conjunto X y una familia de subconjuntos $\mathcal{B}(X) = (V_i)_{i\in I}$, esta familia es *base de una topologia* si cumple:

   (a) $\cup_{i\in I} V_i = X$;

   (b) $\forall i, j \in I,\ \forall x \in V_i \cap V_j,\ \exists k \in I\ :\ x \in V_k \subset V_i \cap V_j$.

3. **Demo.** Consideremos un atlas en X, $\mathcal{A} = (c_i)_{i\in I}$, $c_i = (U_i, \varphi_i)$, $\varphi_i : U_i \to \mathbf{R}^n$. Debemos probar que la familia $\mathcal{B}_{\mathcal{A}}(X) = \{\varphi_i^{-1}(W)\ :\ i \in I,\ W \subset R^n$ *abierto*$\}$ cumple las dos condiciones.

   (a) Sea $x \in X$, $\exists U_i \subset X\ :\ x \in U_i$. Escribimos $U_i = \varphi_i^{-1}(\mathbf{R}^n)$. $\mathbf{R}^n$ es abierto en $\mathbf{R}^n$, por tanto $\varphi_i^{-1}(\mathbf{R}^n) \subset B_A(X)$.

   (b) Consideremos $x \in \varphi_i^{-1}(W) \cap \varphi_i^{-1}(W')$, $i, j \in I$, $W, W' \subset \mathbf{R}^n$ abiertos. Definimos $W'' := W \cap (\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})(W' \cap \varphi_j(U_i \cap U_j))$. Es un abierto de $\mathbf{R}^n$. Consideremos $\varphi_i^{-1}(W'')$. Tenemos que, $\varphi_i(x) \in W$, y ademas,

$$\begin{array}{rcl} \varphi_j(x) & \in & W' \cap \varphi_j(U_i \cap U_j) \\ x & \in & \varphi_j^{-1}(W' \cap \varphi_j(U_i \cap U_j)) \\ \varphi_i(x) & \in & (\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})(W' \cap \varphi_j(U_i \cap U_j)) \end{array}$$

   por lo que $\varphi_i(x) \in W \cap (\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})(W' \cap \varphi_j(U_i \cap U_j)) = W''$ y tenemos que $x \in \varphi_i^{-1}(W'')$.
   Ahora bien, puesto que $W'' \subset W$, tenemos que $\varphi_i^{-1}(W'') \subset \varphi_i^{-1}(W)$. Por otro lado,

$$\begin{array}{rcl} W'' & \subset & (\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})(W' \cap \varphi_j(U_i \cap U_j)) \\ \varphi_i^{-1}(W'') & \subset & \varphi_j^{-1}(W' \cap \varphi_j(U_i \cap U_j)) \subset \varphi_j^{-1}(W') \end{array}$$

   y por tanto $\varphi_i^{-1}(W'') \subset \varphi_i^{-1}(W) \cap \varphi_j^{-1}(W')$. *q.e.d.*

4. Las familias de subconjuntos de X que son uniones de dominios de cartas forman el conjunto de abiertos de una topologia sobre X, llamada **subyacente** a la estructura de variedad. A veces tambien se la llama *topologia asociada al atlas.*

5. Dos atlas C^r-equivalentes definen la misma topologia subyacente. Por tanto, esta solo depende de la clase de equivalencia, ie., de la estructura de variedad.

6. Para toda carta $c = (U, \varphi)$ de X, la aplicacion φ es un homeomorfismo del abierto U (dotado de la topologia inducida por la topologia de X) en $\varphi(U) \subset \mathbf{R}^n$.

7. (Recordatorio) Sea (X, T) un espacio topologico y $H \subseteq X$. La *topologia inducida* por T en H se define como $T|_H = \{A \cap H : A \in T\}$.

8. El que para la topologia subyacente la variedad sea localmente homeomorfa a $\mathbf{R}^n$ no impide la existencia de "patologias" globales. Es costumbre excluir dos de ellas: (1) que la variedad no sea Hausdorff, o (2) que tenga "demasiados abiertos". Por eso **requeriremos que las variedades sean Hausdorff y que satisfagan el 2^o axioma de numerabilidad**.

9. (Recordatorio)

   (a) Decimos que un espacio topologico (X, T) es *Hausdorff* si para todo par de puntos $x \neq y$ existen entornos $U \ni x$, $V \ni y$ tales que $U \cap V = \emptyset$;

   (b) Decimos que un espacio topologico (X, T) satisface el 2^o *axioma de numerabilidad* si T tiene una base numerable de abiertos.

10. En lo sucesivo usaremos el termino "*variedad*" para referirnos exclusivamente a variedades cuya topologia subycacente sea Hausdorff y satisfaga el 2^o axioma de numerabilidad, en caso contrario diremos simplemente que el par $(X, \mathcal{A})$ admite una **estructura** C^r o C^r-diferenciable (*sic*).

2.2.– Ejemplos

11. **Ejemplo**: $\mathbf{R}^n$ con el atlas formado por una unica carta $(\mathbf{R}^n, id)$ es una variedad diferenciable de dimension n.

12. **Ejemplo**: Sea $(X, \mathcal{A})$ una variedad de dimension n y clase C^r. Si $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)_{i \in I},\ \varphi_i : U_i \to \mathbf{R}^n\}$ y U es un abierto de X, definimos $\mathcal{A}_U = \{(U_i \cap U, \varphi_i|_{U_i \cap U})_{i \in I},\ \varphi_i|_{U_i \cap U} : U_i \cap U \to \mathbf{R}^n\}$. Entonces, $(U, \mathcal{A}_U)$ es una variedad de dimension n y clase C^r. La topologia subyacente es la topologia inducida como subespacio de X, y decimos que U es **subvariedad abierta** de X. (ver punto 6 y 7).

13. **Ejemplo**: Sean X, Y dos variedades de dimension m y n, respectivamente, y de clase C^r con atlas $\mathcal{A}_X = \{(U_i, \varphi_i)_{i \in I},\ \varphi_i : U_i \to \mathbf{R}^m\}$, $\mathcal{A}_Y = \{(V_j, \psi_j)_{j \in J},\ \psi_j : V_j \to \mathbf{R}^n\}$. Denotemos por $\mathcal{A}_{X \times Y} = \mathcal{A}_X \times \mathcal{A}_Y = \{(U_i \times V_j, \varphi_i \times \psi_j)_{i \in I,\, j \in J},\ \varphi_i \times \psi_j : U_i \times V_j \to \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n\}$. Entonces $(X \times Y, \mathcal{A}_{X \times Y})$ es una variedad de dimension $(m+n)$ y de clase C^r. La topologia subyacente es la topologia producto, y $X \times Y$ se denomina **variedad producto**.

14. (Recordatorio) Sean (X, T_X), (Y, T_Y) dos espacios topologicos. Llamamos *abierto en la topologia producto* a todo conjunto $G \subseteq X \times Y$ tal que para todo punto $(x, y) \in G$ existen abiertos $U \in T_X$, $V \in T_Y$ tales que $(x, y) \in U \times V \subseteq G$. A la familia de todos estos conjuntos abiertos la denotamos por $T_X \times T_Y$ y el espacio topologico $(X \times Y, T_X \times T_Y)$ se llama *espacio topologico producto.*

15. **No-Ejemplo** *(Topologia subyacente no Hausdorff)*: Sea $X = ((]-1,0[\cup]0,1[) \times \{0\}) \cup \{(0,1),(0,-1)\}$. Consideremos el atlas $\mathcal{A} = \{c_1, c_2\}$ formado por dos cartas $c_1 = (X\backslash\{(0,-1), p_1)$ donde $p_1 : X\backslash\{(0,-1)\} \to]-1,1[$ y $c_2 = (X\backslash\{(0,1)\}, p_2)$ donde $p_2 : X\backslash\{(0,1)\} \to]-1,1[$, p_1, p_2 definidas como la proyeccion a la primera componente.
Sea U_0 un entorno abierto del $0 \in]-1,1[$, entonces $p_1^{-1}(U_0)$ y $p_2^{-1}(U_0)$ son abiertos de la topologia subyacente a $(X, \mathcal{A})$ conteniendo respectivamente a los puntos $(0,1)$ y $(0,-1)$ con $p_1^{-1}(U_0) \cap p_2^{-1}(U_0) \neq \emptyset$. Por tanto, no es Hausdorff.

16. **No-Ejemplo** *(Topologia subyacente no 2-numerable)* Sea $\mathbf{R}^2$ con el atlas dado por $\mathcal{A} = \{(\mathbf{R} \times \{y\}, p_{1,y})_{y\in\mathbf{R}}\}$ donde $p_{1,y} : \mathbf{R} \times \{y\} \to \mathbf{R} : (x,y) \mapsto p_1(x,y) = x$. $(\mathbf{R}^2, \mathcal{A})$ define una estructura diferenciable (ie., C^∞) de dimension 1 en $\mathbf{R}^2$, pero la topologia subyacente no satisface el 2^o axioma de numerabilidad, por tanto no es variedad.
La base de la topologia subycacente viene dada por $\mathcal{B}_\mathcal{A}(\mathbf{R}^2) = \{p_{1,y}^{-1}(W),\ y \in \mathbf{R},\ W \subset \mathbf{R}\ \textit{abierto}\}$. Esta base esta indexada por $y \in \mathbf{R}$, que no es un conjunto numerable, por tanto $\mathcal{B}_\mathcal{A}(\mathbf{R}^2)$ no es numerable, ie., no satisface el 2^o axioma de numerabilidad.