Leccion 3.
Aplicaciones diferenciables. Definiciones basicas.

3.1.– Aplicaciones diferenciables

1. Sea X una variedad de dimension m y clase C^r, y sea $f : X \to \mathbf{R}^n$. Se dice que **f es de clase C^r** si para toda carta $c = (U, \varphi)$ de X, se tiene que $f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ es de clase C^r. El conjunto de las aplicaciones de clase C^r de X en $\mathbf{R}^n$ se denota por $C^r(X; \mathbf{R}^n)$ y es un subespacio vectorial del espacio de todas las aplicaciones de X en $\mathbf{R}^n$.

$$\begin{tikzcd} U \subset X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathbf{R}^n \arrow[d, equal] \\ \varphi(U) \subset \mathbf{R}^m \arrow[r, "f\circ\varphi^{-1}"'] & \mathbf{R}^n \end{tikzcd}$$

2. Sea X como en el punto anterior ($dim(X) = m,\ C^r$) y $f : X \to \mathbf{R}$ (es decir, el caso especial con $n = 1$), el conjunto de todas las aplicaciones de clase C^r de X en $\mathbf{R}$ se denota por $C^r(X; \mathbf{R})$ o simplemente por $C^r(X)$ y es una subalgebra del algebra de todas las aplicaciones de X en $\mathbf{R}$. Los elementos de $C^r(X)$ se denominan **funciones** definidas sobre X.

3. Sean X e Y dos variedades de dimensiones respectivas m y n, y de clase C^r, y sea $f : X \to Y$ una aplicacion de X en Y. Se dice que **f es de clase C^r** o que **f es un morfismo de variedades, de clase C^r** si:
   (a) f es continua;
   (b) para toda carta $c_Y = (V, \psi)$ de Y (valorada en $\mathbf{R}^n$), la aplicacion $\psi \circ f : f^{-1}(V) \subset X \to \mathbf{R}^n$, de la subvariedad abierta $f^{-1}(V) \subset X$ en $\mathbf{R}^n$ es de clase C^r (en el sentido del punto 1).

Analogamente (unificando los puntos 1. y 3.):

4. Sean X e Y dos variedades de dimensiones respectivas m y n, y de clase C^r. Sea $f : X \to Y$ una aplicacion de la variedad X en la variedad Y. Se dice que que las cartas (U, φ) de X y (V, ψ) de Y son **cartas adaptadas** si $f(U) \subset V$. Se dice que f *es de clase C^r* o que f *es un morfismo de variedades de clase C^r* si para cada punto $x \in X$ existen cartas adaptadas $c_X = (U, \varphi)$ de X (valorada en $\mathbf{R}^m$) y $c_Y = (V, \psi)$ de Y (valorada en $\mathbf{R}^n$) tales que la composicion $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ (llamada **expresion de f en las cartas dadas**) es una aplicacion $\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ de clase C^r.

$$\begin{array}{ccc} U \subset X & \xrightarrow{f} & V \subset Y \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\psi} \\ \varphi(U) \subset \mathbf{R}^m & \xrightarrow[\bar{f}]{} & \psi(V) \subset \mathbf{R}^n \end{array}$$

3.2.– Propiedades basicas

5. (a) **(prop)** *La composicion de morfismos de clase C^r es un morfismo de clase C^r.*
Estudiemos el caso C^∞. Sea $f : X \to Y$ diferenciable, entonces para cada punto $x \in X$ existen cartas adaptadas (U, φ) de X y (V, ψ) de Y, $f(U) \subset V$ de modo que la representacion de f en las cartas dadas $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \mathbf{R}^{dim(X)} \to \mathbf{R}^{dim(Y)}$ es diferenciable. Sea $g : Y \to Z$ una aplicacion diferenciable en las condiciones analogas, con (W, ζ) una carta de Z adaptada a la carta (V, ψ) de Y. La correspondiente representacion local $\zeta \circ g \circ \psi^{-1}$ es diferenciable de $\mathbf{R}^{dim(Y)} \to \mathbf{R}^{dim(Z)}$. Entonces, las cartas (U, φ) de X y (W, ζ) de Z son adaptadas a traves de $g \circ f$, y la representacion local
$$(\zeta \circ g \circ \psi^{-1})(\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) = \zeta \circ (g \circ f) \circ \varphi^{-1}$$
es diferenciable $\mathbf{R}^{dim(X)} \to \mathbf{R}^{dim(Z)}$. La aplicacion $g \circ f : X \to Z$ es diferenciable.

(b) **(prop)** *La diferenciabilidad de la expresion de f en unas cartas dadas es independiente de las cartas escogidas.*
Sea $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ la representacion local de una aplicacion diferenciable entre X e Y en un entorno de $x \in U \subset X$. Sea (U', φ') una carta de X en x, entonces en la interseccion $U \cap U'$ el cambio de carta se realiza mediante $\varphi \circ \varphi'^{-1} : \varphi'(U \cap U') \to \varphi(U \cap U')$ (idem para (V', ψ')). La presentacion local de f en las nuevas cartas viene dada por
$$(\psi' \circ \psi^{-1})(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi \circ \varphi'^{-1}) = \psi' \circ f \circ \varphi'^{-1}$$
Puesto que las funciones de transicion entre cartas son diferenciables, y la expresion local en las cartas originales es diferenciable, la composicion es diferenciable y la diferenciabilidad no depende de la eleccion de cartas.

(c) **(prop)** *Toda aplicacion diferenciable (en el sentido del punto 4) es continua.*
Si $f : X \to Y$ es diferenciable, entonces, para todo $x \in X$ podemos encontrar cartas adaptadas por f, (U, φ) de X, $x \in U$, (V, ψ) de Y, $f(U) \subset V$ tal que la expresion de f en las cartas dadas $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbf{R}^m \to \psi(V) \subset \mathbf{R}^m$ es diferenciable. En $\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$,

diferencaible implica continua por lo que $\bar{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ es continua. Podemos escribir f como $\psi^{-1} \circ \bar{f} \circ \varphi$. Como φ, ψ son homeomorfismos (con la topologia subyacente a la estructura de variedad), entonces f es continua en X.

(d) **def.** Para que una biyecction $f : X \to Y$ entre variedades de clase C^r sea un isomorfismo de clase C^r, es necesario y suficiente que f y f^{-1} sean morfismos de clase C^r;

(e) **def.** Un isomorfismo de clase C^∞ entre variedades diferenciables se denomina **difeomorfismo**, y las variedades diferenciables relacionadas por difeomorfismos, **variedades difeomorfas**. Esta relacion es de equivalencia.

6. A todos los efectos, se consideran equivalentes las variedades difeomorfas, mientras no las dotemos de alguna estrucutra adicional (eg., una metrica riemanniana).