Leccion 4.
Aplicaciones diferenciables. Ejemplos.

4.1.– Aplicaciones diferenciables en sistemas de coordenadas

Veamos como funciona estos conceptos en sistemas de coordenadas:Sean X e Y variedades, $a \in X$, $b \in Y$, y sea $f : X \to Y$ con $f(a) = b$ de clase C^r. Consideremos sistemas de coordenadas $(U; \xi^1, \dots, \xi^m)$ de X en a y $(V; \eta^1, \dots, \eta^n)$ de Y en b respectivamente, con $f(U) \subset V$.
Sea ξ la aplicacion $(\xi^1, \dots, \xi^m)$ de U en $\mathbf{R}^m$. Entonces, existen funciones u^j de clase C^r, $u^j : \xi(U) \subset \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ tales que las coordenadas de un punto $y = f(x)$ de Y (para $x \in U$) vienen dadas por

$$\eta^j(y) = u^j(\xi^1(x), \dots, \xi^m(x)), \qquad 1 \leq j \leq n$$

o equivalentemente

$$\eta^j \circ f = u^j(\xi^1, \dots, \xi^m), \qquad 1 \leq j \leq n.$$

Decimos en este caso que la formula precedente constituye la *expresion de f en los sistemas de coordenadas dados* (ver punto 4.). Reciprocamente, si para todo punto a de X, es posible encontrar un sistema de coordenadas de X en a y un sistema de coordenadas de Y en $b = f(a)$, satisfaciendo las condiciones precedentes, entonces f es de clase C^r.

4.2.– Ejemplos

2. (a) **Ejemplo.** *La identidad es diferenciable.*
   La identidad $id : U \to U$ en la carta (U, φ) de X (naturalmente adaptada a si misma por id) se representa en las cartas dadas por $\varphi \circ id \circ \varphi^{-1} = id : \varphi(U) \subset \mathbf{R}^n \to \varphi(U) \subset \mathbf{R}^n$, que es diferenciable entre abiertos de $\mathbf{R}^n$.

   (b) **Ejemplo.** *Sea $U \subset X$ una subvariedad abierta. Entonces,*

      i. *La inclusion $i : U \to X$ es diferenciable.*
      Las cartas sobre U vienen dadas por $(U \cap U_i, \varphi_i|_{U \cap U_i})$ donde (U_i, φ_i) es una carta de X. En consecuencia, para todo $u \in U$ las cartas estan adaptadas a la incluision i. La representacion de i en las cartas dadas no es otra cosa que la inclusion de abiertos de $\mathbf{R}^n$ dado por $(\varphi_i|_{U \cap U_i}(U \cap U_i)) \subset \varphi_i(U_i)$, la aplicacion $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ dada por $\varphi_i \circ i \circ \varphi_i|_{U \cap U_i}^{-1}$ es diferenciable, y por tanto $i : U \to X$ es aplicacion diferenciable.

      ii. *Si $f : X \to Y$ es diferenciable, entonces $f|_U : U \to Y$ tambien lo es.*
      $f|_U$ es la composicion de $f \circ i$, ambas diferenciables. En consecuencia, $f|_U$ es diferenciable.

iii. *Si $f|_U : U \to Y$ es diferenciable, entonces $f : X \to Y$ es diferenciable en todos los puntos de U.* Sea $x \in U$, (U', φ) una carta de X en x, (V, ψ) una carta de Y en $f(x) \in V$, con $f(U') \subset V$. Por un lado tenemos que

$$U \cap U' \xrightarrow{i} U' \subset X \xrightarrow{f} V \subset Y$$

la composicion siendo $f|_U$ que es diferenciable. Al usar cartas obtenemos

$$\varphi|_{U \cap U'}(U \cap U') \xrightarrow{i} \varphi(U') \subset \mathbf{R}^m \xrightarrow{\bar{f}} \psi(V) \subset \mathbf{R}^n$$

donde ahora i es la inclusion de abiertos en $\mathbf{R}^m$.

$$\begin{array}{ccccc}
U \cap U' & \xrightarrow{i} & U' & \xrightarrow{f} & V \\
{\scriptstyle \varphi|_{U\cap U'}}\downarrow & & {\scriptstyle \varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \psi} \\
\varphi(U \cap U') & \xrightarrow[i]{} & \varphi(U') \subset \mathbf{R}^m & \xrightarrow[\bar{f}]{} & \psi(V) \subset \mathbf{R}^n
\end{array}$$

Tenemos que $\overline{f|_U} = \bar{f} \circ i = (\bar{f})|_{\varphi(U \cap U')}$ es diferenciable, entonces $\bar{f}$ es diferenciable, por lo que f es diferenciable en x.

iv. *No toda aplicacion diferenciable de U en Y es la restriccion de una aplicacion diferenciable global de X en Y.*

(c) **Ejemplo.** Sea $X \times Y$ una variedad producto de variedades X e Y,

i. *Las proyecciones $\pi_1 : X \times Y \to X$, y $\pi_2 : X \times Y \to Y$ son diferenciables.*
Veamos el primer caso, sea $(U \times V, \varphi \times \psi)$ una carta de $X \times Y$, la carta (U, φ) de X es adaptada a la anterior por π_1 pues $\pi_1(U \times V) = U$. La representacion en las cartas dadas es simplemente $\varphi \circ \pi_1 \circ (\varphi \times \psi)^{-1}$ que es la proyeccion a la primera componente de abiertos en $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$. Esta aplicacion es diferenciable y en consecuencia, π_1 lo es. Analogamente con π_2.

ii. Sea $x \in X,\ y \in Y$. Entonces, las aplicaciones

$$i_x : Y \to X \times Y : y \mapsto i_x(y) = (x, y)$$
$$i_y : X \to X \times Y : x \mapsto i_y(x) = (x, y)$$

son diferenciables.

iii. Si $f_i : X_i \times Y_i,\ i = 1, 2$ son diferenciables, entonces $f_1 \times f_2 : X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$ tambien es diferenciable.

iv. Si $f_i : X \to Y_i,\ i = 1, 2$ son diferenciables, entonces $(f_1, f_2) : X \to Y_1 \times Y_2$ tambien es diferenciable.